Schwingung und Schall von Glocken

Helmut Fleischer
Institut für Mechanik, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, UniBw München, 85577 Neubiberg

1. Einleitung

Seit nahezu drei Jahrtausenden werden Glocken aus Bronze gegossen und in vielfältiger Weise genutzt, beispielsweise als Signalgeber (Feuerglocke) oder Musikinstrumente (Glockenspiel). Glocken wird besonders im abendländischen Kulturkreis eine herausgehobene Rolle zugeschrieben, was verschiedene Gründe hat. Eine wesentlicher dürfte ihre liturgische Bedeutung, ein anderer das geheimnisvolle Dunkel sein, das ihren Entwurf und ihre Herstellung umgibt. Wie eine "Rippe" zu konstruieren ist, aus der durch Rotation die Glockenform entsteht, behandeln die Glockengießerfamilien als Geheimnis. Ebenso werden die Kenntnisse, die Voraussetzung für die fachgerechte Fertigung der Form und für den alles entscheidenden Guss sind, innerhalb eines eng begrenzten Personenkreises gehütet. So ist zumindest jede Kirchenglocke ein individuell entworfenes, handwerklich gefertigtes Unikat und damit das genaue Gegenteil des Produktes einer High-Tech-Industrie.

Fig. 1. Kirchenglocke, auf die sich die folgenden Untersuchungen beziehen.

Vielleicht gerade deshalb untersuchen Physiker und Ingenieure Glocken auch heute. Beispielhaft seien aus dem Gebiet der Schwingungen Arbeiten von *Lehr (1986)*, *Perrin und Charnley (1987)*, *Rossing und Perrin (1987)* sowie *Schad und Frik (1993)* genannt. Dabei wird die Glocke so betrachtet, wie es *Tyzzer* im Jahr 1930 (abgedruckt im Sammelband von *Rossing (1984)*) formuliert hat: "Eine Glocke ist eine metallische Struktur, die für die Erzeugung von Schall von einer angenehmen Qualität ausgelegt ist. Die Qualität hängt von den relativen Amplituden und Frequenzen der Reihe von Tönen ab, die ihrerseits von ihrer Gestalt und Dicke abhängen." Die Schwingungen dieser metallischen Struktur sowie das Schallsignal, das sie hervorrufen, sind das Thema des vorliegenden Beitrages.

2. Vibroakustische Experimente

Nach der Systematik von *Hornbostel und Sachs (1914)* gehören Glocken der Instrumentenfamilie der Idiophone an, bei denen das Schallsignal mit der Schwingung des gesamten Instrumentenkörpers verknüpft ist. Dessen Schwingungen zu verstehen, ist deshalb von zentraler Bedeutung. Einen möglichen Zugang bieten Messungen. Bereits vor mehr als zwei Jahrhunderten hat der große Experimentator *Chladni (1787)* erste Erfolge in dieser Richtung dokumentiert. Im vorliegenden Kapitel sind Ergebnisse eigener Experimente zusammengestellt. Aus Gründen einer besseren Überschaubarkeit beziehen sich sämtliche Resultate auf die in Fig. 1 abgebildete Kirchenglocke. Diese hat die Masse 37 kg und ist im traditionellen Mantel-Abheb-Verfahren aus Glockenbronze (ca. 78% Cu und 22% Sn) gegossen. Eine Passauer Glockengießerei hat sie dem Institut für Mechanik zur Verfügung gestellt und damit die Voraussetzung dafür geschaffen, unterschiedliche Verfahren am selben Objekt erproben und vergleichen zu können. Die Erzeugende dieser Glocke ist neben einigen Fachbegriffen Fig. 2 zu entnehmen. Weiteres zur Nomenklatur hat *Schad (1996)* zusammengestellt.

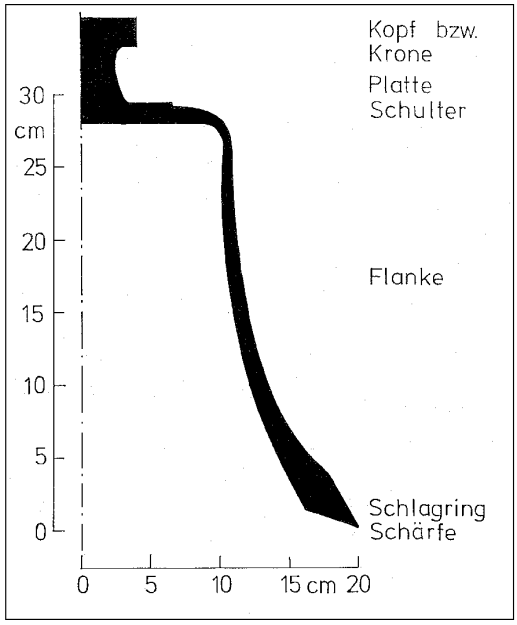

Fig. 2. "Rippe" der Glocke mit den wichtigsten Bezeichnungen.

2.1. Schallmessungen

Fig. 3 entsteht, wenn man die in Fig. 1 abgebildete Glocke am Schlagring mit einem Hammer anschlägt und das Schallsignal einer FFT-Analyse unterzieht. Die wiederholte Analyse ergibt ein 3D-Diagramm, dem die Spektralkomponenten und deren Abnahme über der Zeit zu entnehmen sind. Der Glockenklang hat ein unregelmäßiges Spektrum, das aus zahlreichen, unterschiedlich schnell abklingenden Teiltönen besteht. Deren Nachhallzeiten T_{60} reichen von weniger als einer Sekunde bis zu einer halben Minute. Allgemein werden die fünf ersten Teiltöne dem Prinzipalbereich zugeordnet; sie sind im Folgenden durch römische Ziffern gekennzeichnet. Im Schallpegel-Frequenz-Spektrum von Fig. 4, das eine "Momentaufnahme" unmittelbar

Teilton	Frequenz	Verhältnis f/f_{II}	Bezeichnung
I	0,51 kHz	0,49	Suboktave
II	1,05 kHz	1,00	Prime
III	1,26 kHz	1,20	(Moll-)Terze
IV	1,61 kHz	1,52	Quinte
V	2,12 kHz	2,00	Oberoktave

nach dem Anschlagen darstellt, prägen sie sich klar aus. Wichtige Kennwerte sind in der obigen Tabelle zusammengestellt.

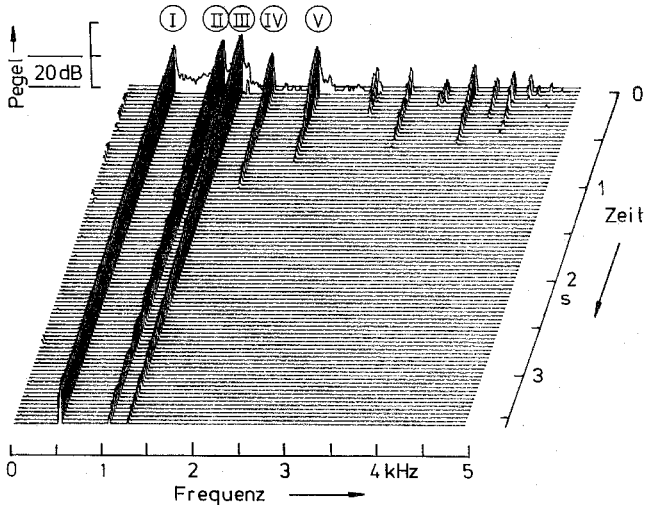

Fig. 3. Schallpegel-Frequenz-Spektrum des Klanges der Glocke in Abhängigkeit von der Zeit.

Campanologen bilden die Intervalle in diesem nach *Terhardt (1998)* "geringharmonischen" Spektrum dadurch, dass sie auf die halbe Frequenz des V. Teiltones ($f_V/2$) beziehen. Hier wird durchgängig die Frequenz f_{II} des II. Teiltones, der Prime genannt wird, als Bezug gewählt. Die Normierung auf die Prim-Frequenz liegt näher, liefert im vorliegenden Beispiel dasselbe Ergebnis, und vor allem werden die Bezeichnungen der übrigen Teiltöne klar: Die Suboktave hat etwa die halbe, die Oberoktave die doppelte Frequenz der Prime. Die Frequenzen der beiden anderen Teiltöne stehen im Verhältnis 6:5 (kleine oder Moll-Terz) bzw. 3:2 (Quint) zur Primfrequenz. Näherungsweise finden sich diese Intervalle in jeder Moll-Oktav-Glocke; vgl. *Lehr (1991)*. Dieser Typus repräsentiert "die" Kirchenglocke schlechthin, deren Geschichte sich mehr als ein halbes Jahrtausend zurückverfolgen lässt und als deren prominenteste Vertreterin die Gloriosa von 1497 im Erfurter Dom angesehen wird.

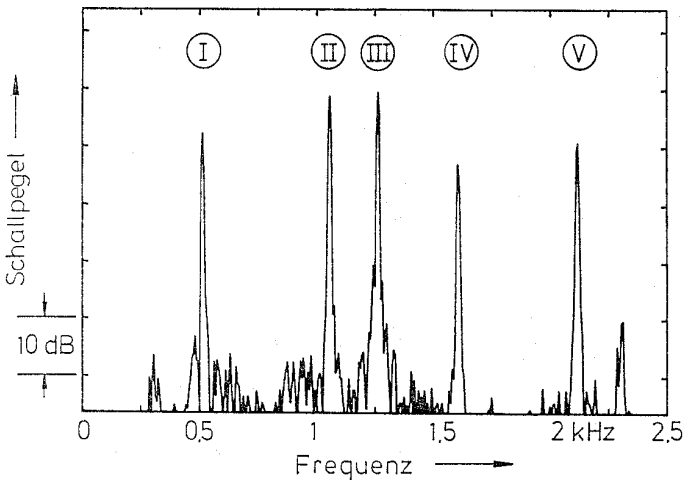

Fig. 4. Schallpegel-Frequenz-Spektrum unmittelbar nach dem Anschlagen der Glocke.

Jeder der Teiltöne rührt von einer Teilschwingung des Glockenkörpers her. Ein Kraftimpuls, wie er beim Anschlagen auf die Glocke aufgebracht wird, verformt deren Körper kurzzeitig und regt damit eine Vielzahl von Schwingungsmoden an. Auf die breitbandige Anregung antwortet die Glocke selektiv mit ihren Eigenmoden, von denen jede andersartig ist. Diese lassen sich, wenn man monofrequent mit der zugehörigen Eigenfrequenz anregt, einzeln "züchten". Nimmt man dann im reflexionsarmen Raum das ebenfalls monofrequente Schallsignal als Funktion des Winkels auf, erhält man Richtdiagramme, wie sie in Fig. 5 zusammengestellt sind. Der Schallpegel wurde in konstantem Abstand (hier 3 m) in der Ebene senkrecht zur Glockenachse aufgezeichnet. Die Richtdiagramme stellen regelmäßige Kleeblatt-Muster mit deutlichen Minima dar. Daraus sowie aus den Phasenbeziehungen kann auf die Lage und Zahl der Knotenmeridiane geschlossen werden, die durchgehend entlang der Mantellinie der Glocke verlaufen. Bezeichnet man deren Anzahl mit dem Formelzeichen *m*, so weisen die Schwingungsformen I und II $m = 2$, die Schwingungsformen III und IV $m = 3$ und die Schwingungsform V bereits $m = 4$ Knotenmeridiane auf.

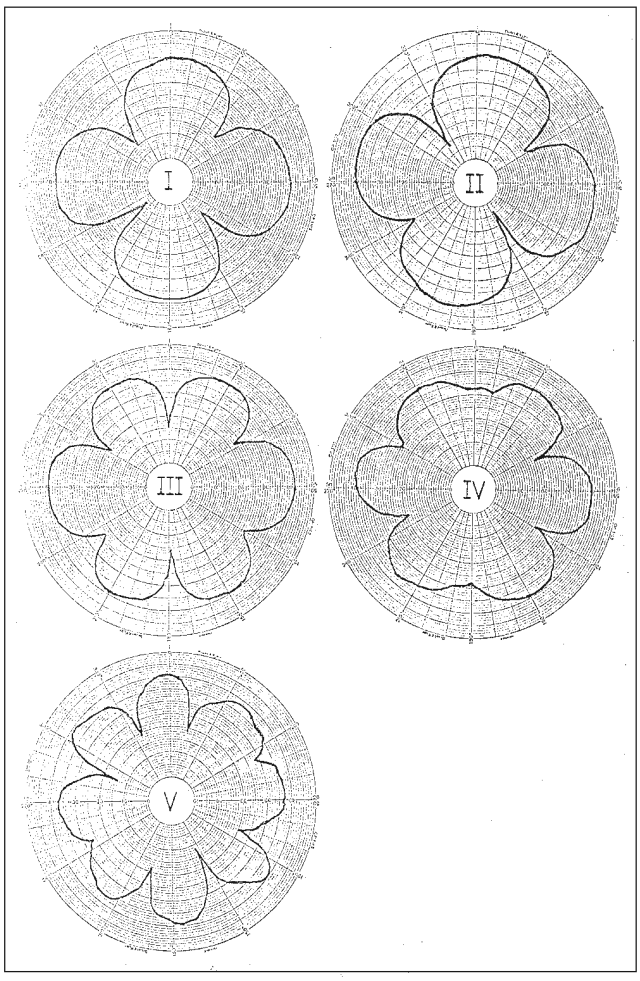

Fig. 5. Horizontale Schallpegel-Richtdiagramme der ersten fünf Teiltöne.

Dieser Befund aus dem Fernfeld bestätigt sich in einer weiteren Messung, in der die akustische Intensität unmittelbar über dem Außenmantel der Glocke bestimmt wurde. Wiederum wurde monofrequent angeregt. Die Knotenlinien, an denen sich die Glocke in Ruhe befindet, spiegeln sich als Null-Linien der Intensität wider. Dabei zeigt sich, dass sich die Moden nicht nur in der Anzahl *m* der Knotenmeridiane, sondern auch durch die Anzahl *n* sowie die Lage der Knotenkreise unterscheiden, die entlang dem Umfang in jeweils konstanter Höhe auf der Flanke liegen. Schließt man die Hüllfläche um die Glocke dadurch, dass man auch über der Platte und in der Mündung misst, können die akustische Gesamtleistung sowie die Beiträge bestimmt werden, die von den verschiedenen Bereichen der Glocke stammen; Näheres hierzu ist bei *Fleischer (1989)* ausgeführt.

2.2. Schwingungsmessungen

2.2.1. Modalanalyse

Weiteren Aufschluss über die Schwingung bringt eine Modalanalyse. Die Glocke wurde mit einem 36∗11-Messgitter

überzogen. An einem Messpunkt nahe dem Schlagring wurde ein Beschleunigungsaufnehmer aufgeklebt ("Fixed Response"), der die Schwingung der Glocke senkrecht zur Mantelfläche erfasste. Angeregt wurde an sämtlichen Punkten mit einem Impulshammer ebenfalls senkrecht zur Mantelfläche. Aus der Kraftanregung und der Bewegungsantwort wurde in einem FFT-

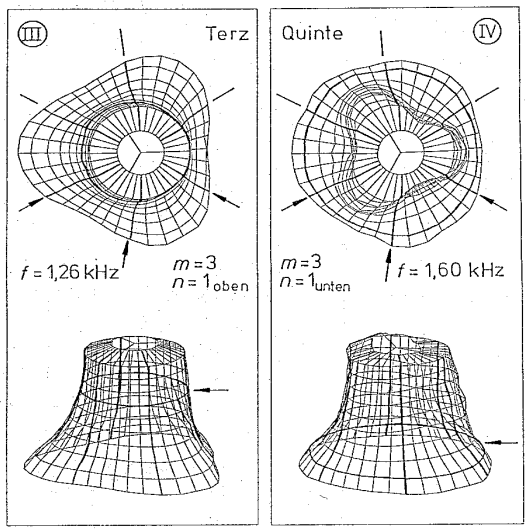

Fig. 6. Experimentelle Modalanalyse zweier Teilschwingungen der Glocke. Die Pfeile deuten auf Knotenmeridiane bzw. Knotenkreise hin.

Analysator für jeden Messpunkt eine Übertragungsfunktion gebildet. Mit einem Computerprogramm wurden daraus die transversalen Eigenmoden der Glocke berechnet. Einige dieser Moden sind durch eine rotationssymmetrische Axialverschiebung (m = 0) bzw. durch eine balkenähnliche Verbiegung der Glocke (m = 1) gekennzeichnet; siehe z.B. *Fleischer (1998)*. Ein Vergleich mit dem Schallspektrum zeigt, dass solche Moden keine oder höchstens sehr schwache Teiltöne zur Folge haben und deshalb für den Klang der Glocke ohne Bedeutung sind. "Klangbildende" Moden haben $m \geq 2$ Knotenmeridiane.

Neben der Anzahl n der Knotenkreise muss ein weiteres Ordnungskriterium herangezogen werden, das deren Lage kennzeichnet. Fig. 6 illustriert dies am Beispiel des III. und IV. Teil-

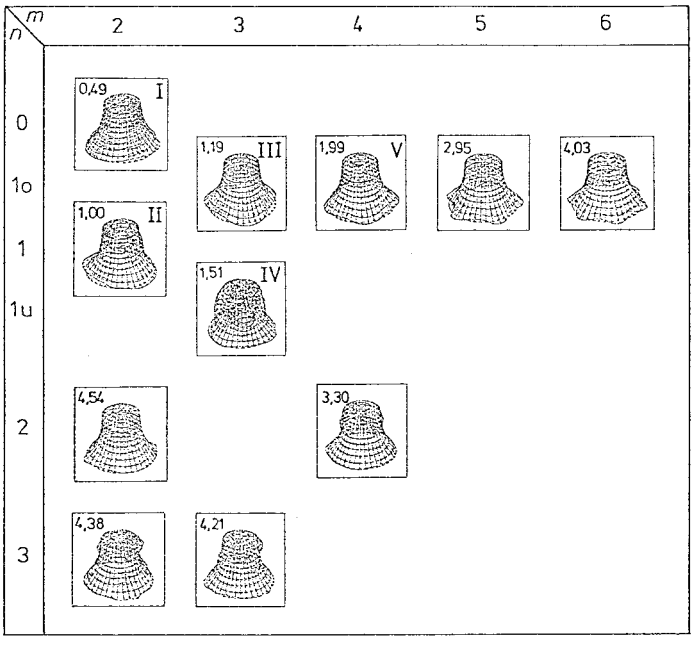

Fig. 7. Experimentelle Modalanalyse der Glocke: Moden und Intervalle.

tones. Die Bezeichnung "1o" besagt, dass *ein* Knotenkreis *oben* auf der Flanke auftritt; siehe linkes Teildiagramm. Dem rechten Teildiagramm zufolge steht "1u" für *einen* Knotenkreis auf deren *unterem* Teil. Fig. 7 zeigt elf klangbildende Eigenmoden der in Fig. 1 abgebildeten Glocke, die durch dieses Experiment im Bereich bis 5 kHz identifiziert wurden. Nach Art eines Periodensystems ist waagerecht die Anzahl m der Knotenmeridiane, senkrecht die Anzahl n der Knotenkreise samt der Kennzeichnung ihrer Lage angetragen. Die fünf Prinzipal-Moden sind mit ihren römischen Ziffern versehen. Die übrigen Moden werden dem sog. Mixturbereich zugeordnet. Die arabischen Ziffern geben die jeweilige Frequenz, bezogen auf die Frequenz f_{II} der Prime (Teilton bzw. Mode II), an. Die Frequenzwerte stimmen mit denjenigen des Schallspektrums in der obigen Tabelle überein. Die geringen Differenzen dürften vor allem eine Folge unterschiedlicher Frequenzauflösung sein.

2.2.2. Schwingungsmuster (Operating Deflection Shapes)

Fig. 8 zeigt Ergebnisse einer Schwingungsanalyse mit dem Laser Scanning Vibrometer. Die Glocke wurde über einen Schwingerreger ("Fixed Excitation") mit einem Pseudo-Rauschen angeregt. Ein Laserstrahl tastete die schwingende Oberfläche aus einer Richtung auf einem vom Bediener definierten Messgitter punktweise ab. Nach dem Doppler-Prinzip erfasste er die Komponente der Schwinggeschwindigkeit in Richtung des Strahls. Im Computer wurde für jeden Gitterpunkt eine Übertragungsfunktion (Schwinggeschwindigkeit am Messpunkt, bezogen auf die Kraft am Anregungspunkt) bestimmt. Nach der Messung wählte der Experimentator anhand der Maxima der Gesamt-Übertragungsfunktion diejenigen Frequenzen aus, für welche die Schwingungen visualisiert werden sollten.

Man erhält sog. Operating Deflection Shapes (ODSs), was mit "Schwingungsmuster" übersetzt werden könnte. Im vorliegenden Fall stellen sie Projektionen einer räumlichen Bewegung auf eine Ebene dar, deren Interpretation mit dem vorhandenen Vorwissen leicht möglich ist. Im Bereich bis 5 kHz wurden 17 klangbildende Schwingungsmuster nachgewiesen, die in Fig. 8 samt den zugehörigen Frequenzintervallen zusammengestellt sind. Dunkle Stellen kennzeichnen Knoten. Gegenüber Fig. 7 ist in der ersten Spalte eine verfeinerte Unterteilung in zwei Knotenkreise weiter unten (n = 2u) bzw. zwei Knotenkreise weiter oben (n = 2o) getroffen. Kleine Diskrepanzen der Intervalle im Vergleich zu Fig. 7 dürften von der unterschiedlichen Frequenzauflösung herrühren. Sie können ihren Grund überdies darin haben, dass nicht Eigenmoden, sondern ODSs in ebener Projektion ermittelt wurden. Die Methode leistet nicht dasselbe wie eine vollständige Modalanalyse, erlaubt aber, innerhalb kurzer Zeit recht anschauliche Resultate zu erzielen.

2.3. Admittanz

Für manche Anwendungen interessiert nicht die Bewegung des gesamten Glockenkörpers, sondern lediglich seine punktuelle Antwort auf eine punktuelle Anregung. Diese Information liefert die mechanische Punkt-Admittanz (siehe *Fleischer (1997)*), welche die "Schwingwilligkeit" der Glocke an der betreffenden Stelle charakterisiert. Daraus lässt sich beispielsweise ablesen, welche Moden der Klöppel an welchem Punkt in welchem Maße hervorrufen kann. Auf einen Schwingerreger wurde ein Impedanzmesskopf montiert und senkrecht gegen die Messstelle gedrückt. Der Schwingerreger wurde mit einem breitbandigen Rauschen gespeist, Kraft und Beschleunigung gleichzeitig am selben Punkt und in derselben Richtung gemessen. Daraus wurde nach entsprechender Verarbeitung im FFT-Analysator als Übertragungsfunktion Schwinggeschwindigkeit/Kraft die Admittanz berechnet.

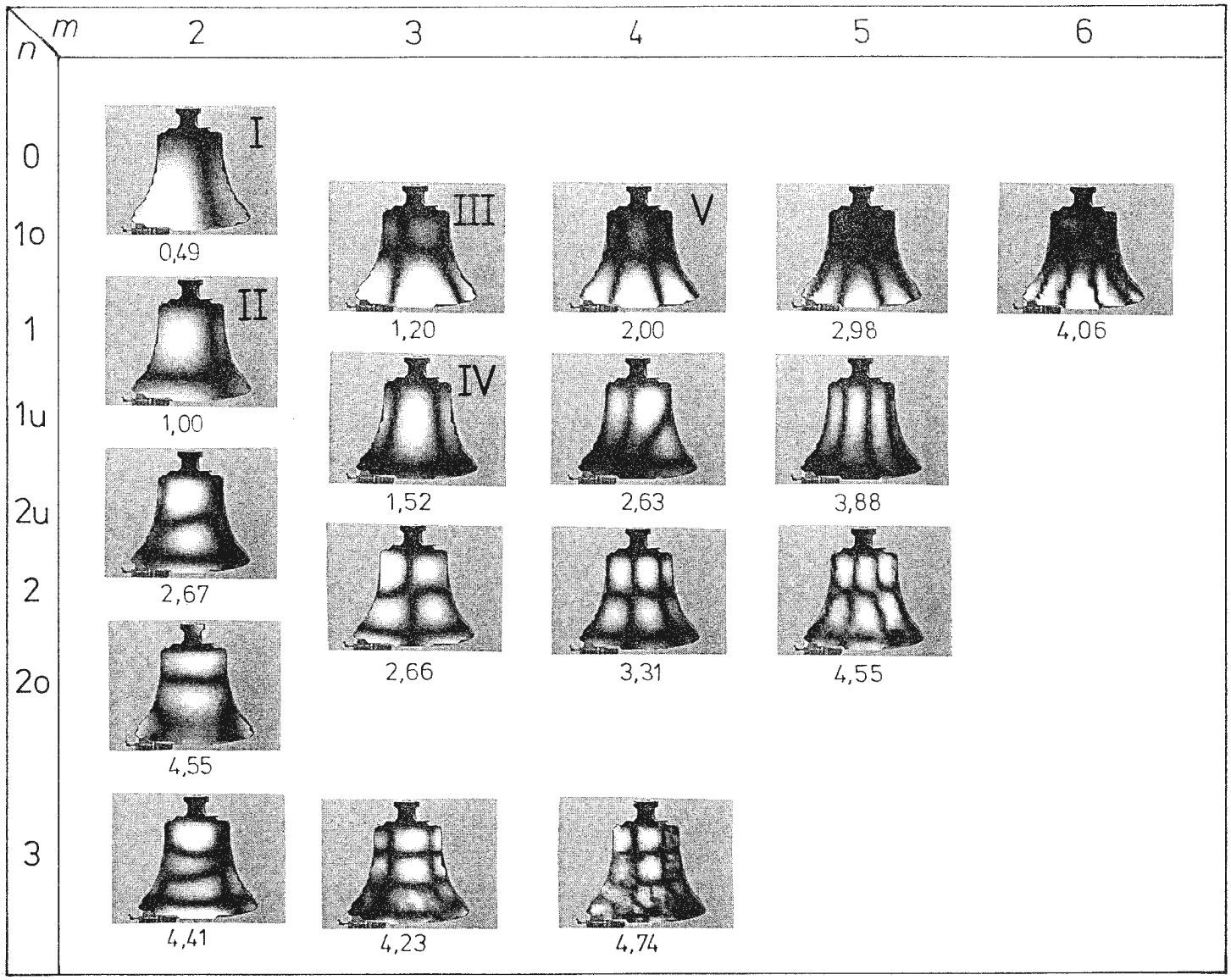

Fig. 8. Operating Deflection Shapes der Glocke, experimentell bestimmt mit dem Laser Scanning Vibrometer, dargestellt nach Art von Chladni-Figuren. Je heller eine Stelle, desto größer ist die Schwinggeschwindigkeit.

Das Beispiel in Fig. 9 bezieht sich auf zehn Messpunkte, die in unterschiedlicher Höhe auf der Flanke der Glocke liegen. Man erkennt u.a., dass es Stellen gibt, an denen bestimmte Eigenschwingungen nicht angeregt werden. Der Grund ist, dass der betreffende Punkt auf einem Knotenkreis dieser Mode liegt. Nahe der Mündung lassen sich sämtliche Moden anfachen. Schlägt man die Glocke dagegen in der oberen Hälfte an, so treten die III. und die V. Teilschwingung praktisch nicht auf. Im Prinzipalbereich verbleiben dann drei Teiltöne in den Intervallen 0,49 : 1 : 1,52 und damit eine nahezu harmonische Reihe.

2.4. Zusammenfassende Bemerkung

Im Schallsignal lassen sich experimentell eine Reihe von Teiltönen nachweisen, von denen jeder linear mit einer Eigenschwingung des Glockenkörpers verknüpft ist. Diese klangbildenden Moden sind durch Biegung gekennzeichnet. Abhängig davon, wo und wie die Glocke angeschlagen wird, werden sie in unterschiedlichem Maße angeregt. Die Glocke ist ein Idiophon, d.h. der Glockenkörper übernimmt neben der Erzeugung auch die Abstrahlung der Teiltöne. Abhängig von Frequenz, Geometrie und Schwingungsform der Glocke setzen sich die mechanischen Teilschwingungen in unterschiedlichem Maße in Teiltöne um. In den zugehörigen Teilschallfeldern spiegeln sich als Pegelminima die Knotenmeridiane wider, von denen die klangbildenden Moden mindestens zwei aufweisen. Neben der Anzahl der Knotenmeridiane kennzeichnen die Anzahl und die Lage der Knotenkreise eine Eigenmode.

3. Berechnung von Glockenschwingungen

3.1. Einfache Modelle

Erste Versuche, die Schwingungen von Glocken theoretisch zu erfassen, gehen auf *Euler (1764)* zurück. Vollzieht man solche Überlegungen nach, wird eine Grundtatsache erkennbar, die für jede Art von Berechnungen gilt: Berechnet wird nie die reale Struktur selbst; vielmehr wird ein mechanisches Modell geschaffen, das mit den Mitteln der Mathematik behandelt wird. Bei der Reduktion der Realität zum Modell sind Annnahmen und Vereinfachungen notwendig. Eine übliche Idealisierung besteht darin, mögliche Ungleichmäßigkeiten im Werkstoff zu ignorieren, isotropes sowie homogenes Material mit linearelastischem Verhalten anzunehmen und die Dämpfung nicht zu berücksichtigen. Um das Problem zweidimensional behandeln zu können, wird darüber hinaus Rotationssymmetrie unterstellt.

Das Modell, das Euler gewählt hat, beruht auf der gedanklichen Zerlegung der Glocke in kurze Zylinderschalen bzw. Kreisringbalken, von denen jeder für sich in seiner Ebene schwingt. Da die gegenseitige Beeinflussung der Ringe nicht berücksichtigt ist, kann dieses unvollkommene Modell naturgemäß nicht den gesamten Sachverhalt richtig erfassen. Jedoch lässt sich daraus der fundamentale Zusammenhang

$$f \sim \frac{d}{r^2}\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

ableiten. Diese "Glockenformel" kann als Beispiel dafür dienen, was von einer analytischen Beziehung zu erwarten ist. Sie soll zumindest Aufschluss darüber geben, in welche Richtung und in welchem Maße Änderungen der Materialeigenschaften (Elastizitätsmodul E, Dichte ρ, Querkontraktionszahl ν) und insbesondere der Geometrie (Wanddicke d, mittlerer Radius r) die Frequenz f eines vorgegebenen Teiltones beeinflussen. Die Formel zeigt zum Beispiel, dass eine Verdoppelung der geometrischen Abmessungen d und r eine Halbierung der Frequenz f des betreffenden Teiltones bewirkt. Die absoluten Frequenzwerte von Glocken beliebiger Gestalt mit dieser Formel zu berechnen, ist allerdings nicht möglich.

Dafür sind weitergehende Modelle notwendig. Aus der Sicht der Elastokinetik stellt die Glocke einen dreidimensionalen, zweifach gekrümmten Kontinuumsschwinger dar. Mit den oben angesprochenen Idealisierungen wäre sie als gekrümmte Rotationsschale zu behandeln. Wesentliches zur Theorie solcher Schalen hat vor mehr als einem Jahrhundert *Love (1888)* beigetragen. Sein Modell ist der Realität sehr nahe. Jedoch ist die Behandlung äußerst kompliziert und führt auf keine geschlossene Lösung, die - ähnlich der obigen Kreisringformel - den funktionalen Zusammenhang der Frequenzen mit den Material- und Geometrieparametern aufzeigen würde.

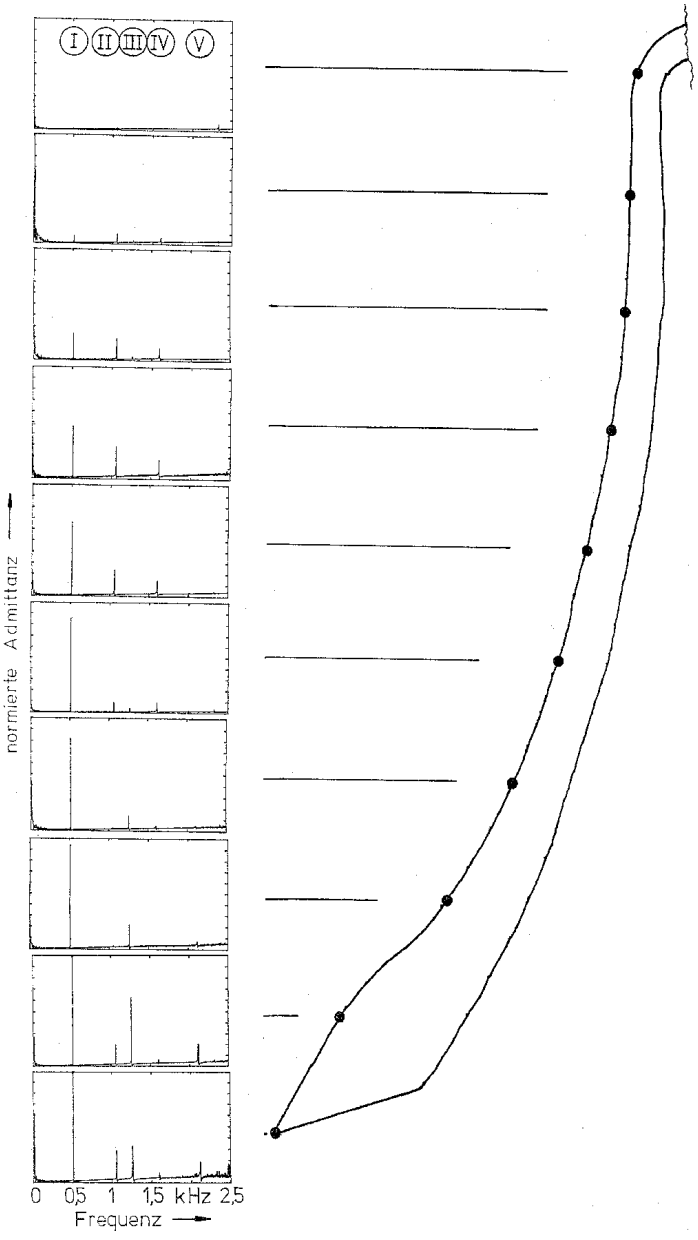

Fig. 9. Punkt-Admittanz als Funktion der Frequenz, gemessen an den markierten Punkten auf der Flanke der Glocke.

3.2. Methode der Finiten Elemente (FEM)

Als moderne Alternative bieten sich numerische Verfahren an. Seitdem immer leistungsfähigere Rechner verfügbar sind, werden Computerverfahren immer attraktiver. Als höchst effektive Vorgehensweise hat sich die Methode der Finiten Elemente (FEM) erwiesen. Sie ist bereits einige Male auf Glocken angewandt worden; siehe z.B. *Perrin et al. (1983), Schad und Frik (1993)*. Auf dem Markt sind zahlreiche Programmsysteme, denen gemeinsam ist, dass die Struktur der Glocke durch eine große Anzahl einfacher Elemente (Ringe, Platten, Quader usw.) angenähert wird. Eine Schwäche von FE-Berechnungen wird in manchen Fällen als schmerzlich empfunden: Die Lösungen gelten für den Einzelfall. Ein direkter Zusammenhang der Eingabeparameter mit dem Endergebnis ist meist nicht erkennbar.

3.2.1. FE-Berechnungen vorhandener Glocken

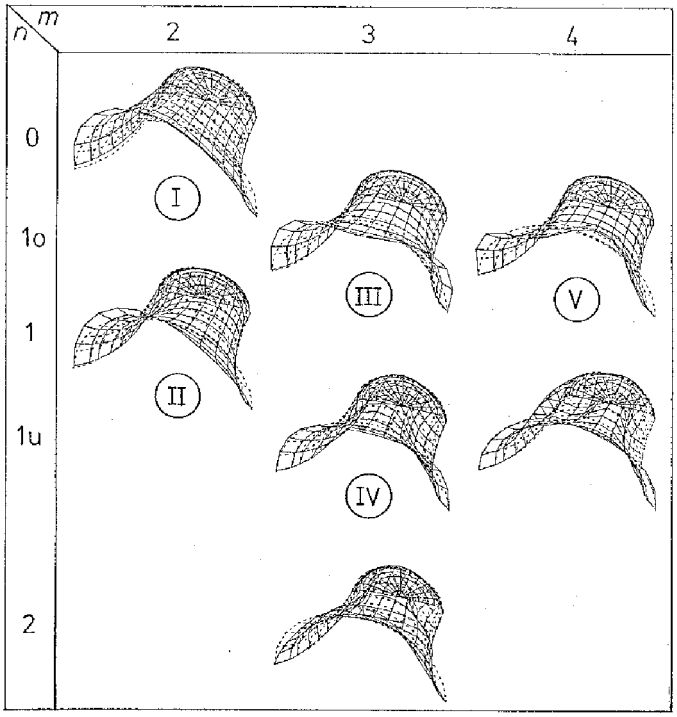

Fig. 10. Halbmodell der Glocke. Dargestellt sind die ersten sieben Moden, errechnet 1990 mit dem FE-Programm ADINA.

Seit mehr als einem Dutzend Jahren wird am Institut für Mechanik die FEM dafür genutzt, Glockenschwingungen zu berechnen. Kommerzielle Programm-Pakete wie ANSYS, ADINA und vor allem NASTRAN fanden Anwendung. Darüber hinaus wurden FE-Programme auch eigenständig entworfen und programmiert. Beispiele für Eigenformen bereits existierender Glocken, die auf diesem Wege berechnet wurden, sind im vorliegenden Abschnitt zusammengestellt.

Neben Vollmodellen, bei denen die Glocke auch längs des gesamten Umfangs diskretisiert ist, wurden Halbmodelle (siehe Fig. 10) verwendet. Verschiedene Elementtypen wurden erprobt. Wenn möglich wurde mit Ringelementen gearbeitet, bei denen die Schwingungsformen in Umfangsrichtung durch Sinusansätze mit $m = 2, 3, \ldots$ Perioden beschrieben sind. Die experimentell gefundenen Eigenformen stimmen regelmäßig gut mit den errechneten überein. Hinsichtlich der Frequenzen liegen bei dem selbstentwickelten Programm (Fig. 11) die Abweichungen derzeit im Prozentbereich. Für übliche Schwingungsrechnungen ist diese Approximation erfreulich. Bei einer

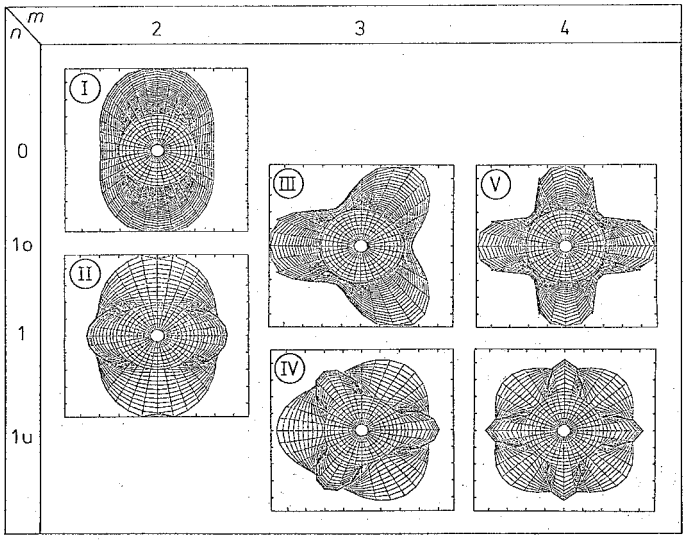

Fig. 11. Ringelement-Modell der Glocke. Visualisiert sind die ersten sechs Moden, errechnet 1999 mit einem am Institut entwickelten PC-Programm.

Glocke stellt sie angesichts der Tatsache, dass ein Frequenzschritt von 6% einem musikalischen Halbton entspricht und Campanologen mit sechzehntel Halbtönen (≅ 0,4%) arbeiten, noch nicht ganz zufrieden. An der Verbesserung, insbesondere bei der Erfassung der Glockengeometrie, wird gearbeitet.

3.2.2. FE-Berechnungen von Modifikationen an Glocken

Sobald das FE-Modell die tatsächliche Glocke soweit beschreibt, dass es die Frequenzen der wesentlichen Teiltöne mit hinreichender Genauigkeit liefert, lassen sich numerische Experimente durchführen. Mit einem Vollmodell ist es beispielsweise möglich, den Einfluss von Verzierungen und Beschriftungen auf der Glocke zu studieren. An allen Modellen lässt sich im Voraus erproben, welche Auswirkungen das Abdrehen von Material auf die Frequenzen der Teiltöne haben wird. Ein eventuell notwendiges Nachstimmen von Glocken kann auf diesem Wege simuliert und genauer dosiert werden.

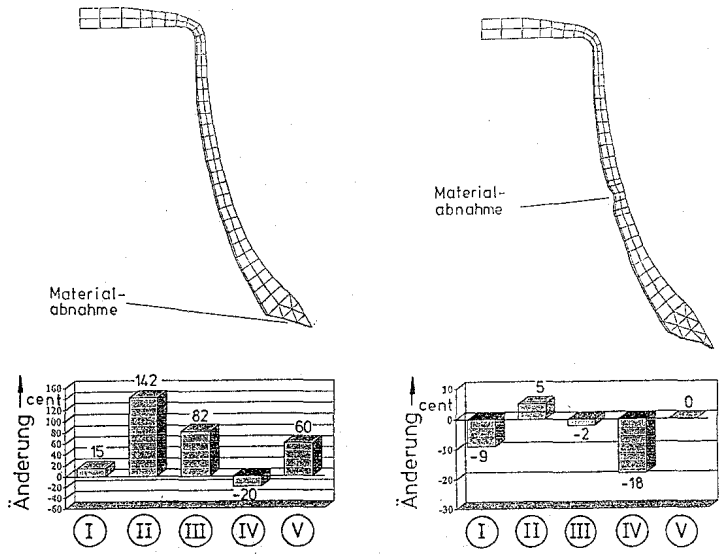

Fig. 12. Mittels FEM simulierte Abnahme von Material an den angegebenen Stellen und daraus resultierende relative Änderung der Frequenzen der ersten fünf Teiltöne in cent (100 cent ≅ 1 Halbton).

Basierend auf einem 80∗40-Modell zeigt Fig. 12 zwei Beispiele, in denen das rotationssymmetrische Nachbearbeiten simuliert ist. Um eine Glocke höher zu stimmen, dreht man Material an der "Schärfe" (siehe Fig. 2) ab. In Fig. 12 links ist dies durch das Verkürzen der Rippe um die unteren Elemente nachgebildet. Die Auswirkungen auf die ersten fünf Teiltöne können dem unteren Diagramm entnommen werden. Die errechnete Verschiebung der Frequenzen ist in cent (≅ 0,06%), d.h. hundertstel Halbtönen, angegeben. Die Glocke zu verkürzen, bewirkt erwartungsgemäß im wesentlichen eine Erhöhung der Frequenzen. Diese prägt sich am stärksten beim II. Teilton (Prime) aus; die übrigen Teiltöne sind in geringerem Maße betroffen. Will man die Glocke tiefer stimmen, so macht man sie lokal dünner. Im rechten Teil von Fig. 12 ist das Ausdrehen an der Innenseite auf etwa halber Höhe simuliert. Dadurch lässt sich vor allem der IV. Teilton (Quinte) absenken. In beiden Fällen wird erkennbar, dass die Nachbearbeitung von Glocken weder einen Teilton allein, noch das gesamte Spektrum insgesamt verschiebt, sondern die Frequenz eines jeden Teiltones in unterschiedlichem Maße beeinflusst. Die Computersimulation kann die Zielsicherheit eines solchen Eingriffes erhöhen und die Gefahr von irreversiblen Verschlechterungen verringern.

3.2.3. Optimierung von Glockenformen

FE-Berechnungen lassen sich auch dazu nutzen, Rippen auf bestimmte Kriterien hin zu optimieren. Vor allem im Zusammenhang mit Große-Terz-Glocken liegen darüber bereits positive Erfahrungen vor; siehe z.B. *Schoofs et al. (1987)* und *Lehr (1987)*. Im Gegensatz zu den üblichen Kleine-Terz-Glocken steht die Frequenz des III. Teiltones nicht im Verhältnis 6:5 (kleine oder Moll-Terz) zur Frequenz des II. Teiltones, son-

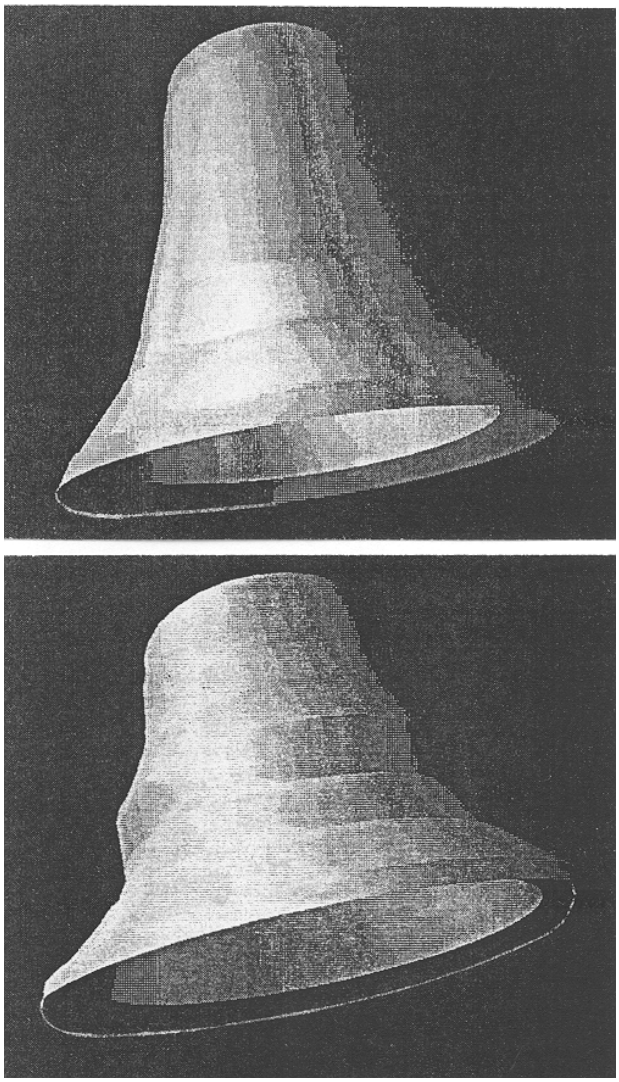

Fig. 13. Optimierung einer Glockenform mittels FEM.
Oben: Kleine-Terz-Glocke bzw.
unten: Große-Terz-Glocke.

dern weist stattdessen das Intervall 5:4 (große oder Dur-Terz) auf. Solche Glocken eignen sich gut für Glockenspiele.

Eigene Studien zu diesem Thema mit dem FE-Programm ANSYS datieren auf das Jahr 1987 zurück. Es wurden die Frequenzen der ersten sechs Teiltöne vorgegeben. Nebenbedingung war eine minimale Masse, was auf sog. leichte Rippen führt. Um akzeptable Rechenzeiten sicherzustellen, wurde die Glocke relativ grob in acht Kegelstumpfschalenelemente finitisiert. Mit diesem Modell wurde eine Vielzahl von FE-Rechenläufen durchgeführt, in denen bestimmte Parameter der Rippengeometrie verändert und die zur veränderten Geometrie gehörenden Eigenfrequenzen berechnet wurden. Dieser Prozess wurde so lange wiederholt, bis eine Rippe gefunden war, die innerhalb festgelegter Grenzen das verlangte Spektrum liefert.

Fig. 13 zeigt die Resultate der Optimierungen. Die obere Form ergibt sich, wenn die Frequenzen der ersten sechs Teiltöne der vorhandenen Kleine-Terz-Glocke von Fig. 1 vorgegeben werden. Das Resultat der Optimierung entspricht ziemlich genau der realen Glocke. Diese stellt offenbar bereits ein Optimum als die leichteste aller Glocken dar, deren sechs tiefste Teiltöne die gemessenen Frequenzen besitzen. Verschiebt man in diesem Spektrum den III. Teilton dergestalt, dass seine Frequenz nun das 1,25-Fache der Frequenz des II. Teiltones ist, dann ergibt die Optimierung die unten in Fig. 13 abgebildete Glocke. Charakteristisch ist vor allem die Ausbauchung der Flanke auf etwa der halben Höhe, die sich auch bei den Glocken nach *Schoofs et al. (1987)* findet. Diese bauchige Rippe scheint eine Möglichkeit zu sein, Große-Terz-Glocken zu formen. Um eventuell mögliche weitere Rippen zu finden, könnten neuartige Optimierungsverfahren wie z.B. genetische Algorithmen von Vorteil sein, mit denen am Institut für Mechanik bereits erste Erfahrungen gesammelt worden sind.

3.3. Zusammenfassende Bemerkung

Numerische Rechenverfahren erlauben es, Eigenformen von Glocken in sehr guter Näherung zu berechnen. Dabei ist es sinnvoll, aus der experimentellen Erfahrung Nutzen zu ziehen, dass die klangbildenden Moden in Umfangsrichtung durch mindestens zwei Sinus- bzw. Cosinusperioden beschrieben werden. Es braucht dann nur die Rippe diskretisiert zu werden. Bezüglich der Eigenfrequenzen existieren derzeit noch Abweichungen im Prozentbereich zwischen Rechnung und Experiment, die weiter verkleinert werden müssen und können.

4. Moden-Splitting

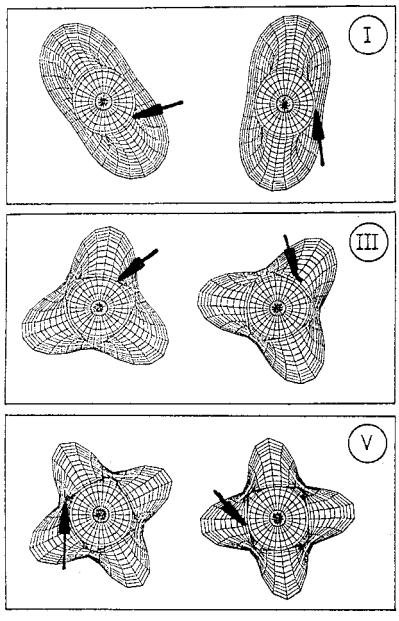

Fig. 14. FE-Berechnung von Schwingungen der Glocke unter Berücksichtigung einer Zusatzmasse (Pfeil) mit Aufspaltung in Partialschwingungsformen.

4.1. Rechenergebnisse

Bereits für einfache Modelle wie den Kreisring besagen theoretische Überlegungen, dass jede nicht-rotationssymmetrische Eigenmode ($m > 0$ Knotenmeridiane) in *zwei* Partialschwingungsformen auftritt. Diese sind von gleicher Gestalt, jedoch unterschiedlicher Winkellage. Bei vollkommener Symmetrie bezüglich der Rotationsachse würden die zugehörigen Frequenzen zusammenfallen. Da jede reale Glocke in Hinsicht auf Geometrie und Material leichte Abweichungen von der absoluten Rotationssymmetrie zeigt, tritt dieser Spezialfall in der Praxis nie auf. Wird eine Glocke zur Berechnung auch in Umfangsrichtung diskretisiert, lassen sich Unsymmetrien - wie z.B. ein lokales Ornament - auf einfache Weise simulieren. Fig. 14 zeigt Beispiele für drei Teilschwingungen mit $m = 2$, 3 bzw. 4 Knotenmeridianen. Der Pfeil gibt die Lage einer zusätzlichen Punktmasse an. Jeder der ursprünglich doppelten Eigenwerte zerfällt in zwei leicht unterschiedliche Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenformen sind um den Winkel $90^0/m$ gegeneinander versetzt und haben zwei leicht unterschiedliche Frequenzen.

4.2. Messergebnisse

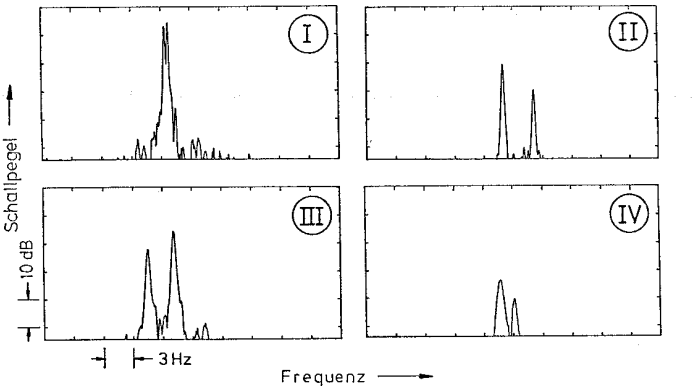

Fig. 15. Gemessene Schallpegel-Frequenz-Spektren der ersten vier Teiltöne: Aufspaltung in Partialtöne.

Folgt man diesen Hinweisen, so findet man die Aufspaltung im Experiment bestätigt. In Fig. 15 sind Spektren der vier ersten Teiltöne der Glocke mit erhöhter Auflösung wiedergegeben. Man erkennt, dass einem Ton nicht eine, sondern stets zwei Spektrallinien zugeordnet sind: Jeder Teilton der Glocke zerfällt in zwei Partialtöne ("Zwillingstöne"). Deren Frequenzen liegen bei der Glocke nach Fig. 1 um Werte auseinander, die zwischen ca. 0,4 Hz beim I. und mehr als 3 Hz beim II. Teilton betragen.

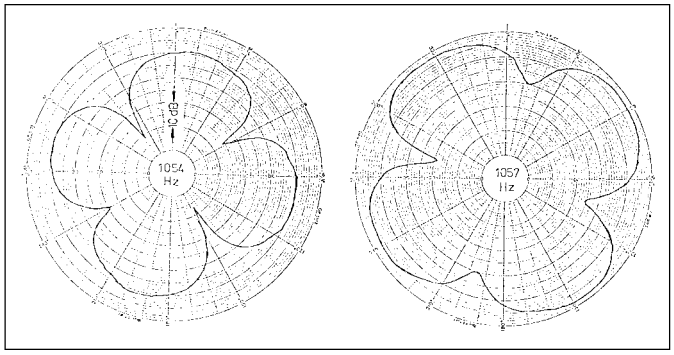

Fig. 16. Horizontal-Richtdiagramme der Glocke bei Anregung mit jeweils einer der Partialfrequenzen des II. Teiltones.

Mit der Aufspaltung der Eigenfrequenzen geht einher, dass jeweils zwei gleichartige, aber gegeneinander verdrehte Partialschallfelder existieren. Die Schallpegel-Richtdiagramme in Fig. 16 gelten für die zwei Partialschwingungen des II. Teiltones

(m = 2), die man bei Anregung mit den zugehörigen Partialfrequenzen erhält. Erwartungsgemäß sind die Schallfelder um den Winkel $90^0/2 = 45^0$ gegeneinander verdreht. Ein Anschlag mit dem Klöppel kann diese hinsichtlich der Frequenz und der Winkellage gegeneinander versetzten Partialschallfelder gleichzeitig hervorrufen. Aus ihrer Überlagerung resultieren komplizierte zeitlich-örtliche Schwebungserscheinungen, die als "Spinning Modes" bezeichnet werden. Für deren Visualisierung liegt ein einfaches Computerprogramm (*Fleischer (1994)*) vor.

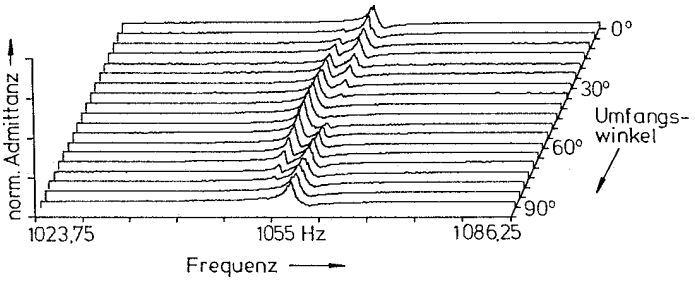

Fig. 17. Admittanz als Funktion der Frequenz auf einem Viertelkreis am Schlagring im Bereich des II. Teiltones.

Das Moden-Splitting tritt auch zutage, wenn direkt auf der Glocke die mechanische Admittanz gemessen wird (Fig. 17). An den entsprechenden Punkten ist deutlich die Aufspaltung der Teiltöne erkennbar. Anhand der Admittanz ist es auch möglich, diejenigen Winkel auf dem Schlagring ausfindig zu machen, an denen entweder nur der eine Partialton, nur der andere, oder beide Partialtöne in gleichem Maße angeregt werden. In Fig. 17 offenbart sich der örtliche Versatz der zum II. Teilton gehörenden Partialschwingungen um den Winkel 45^0.

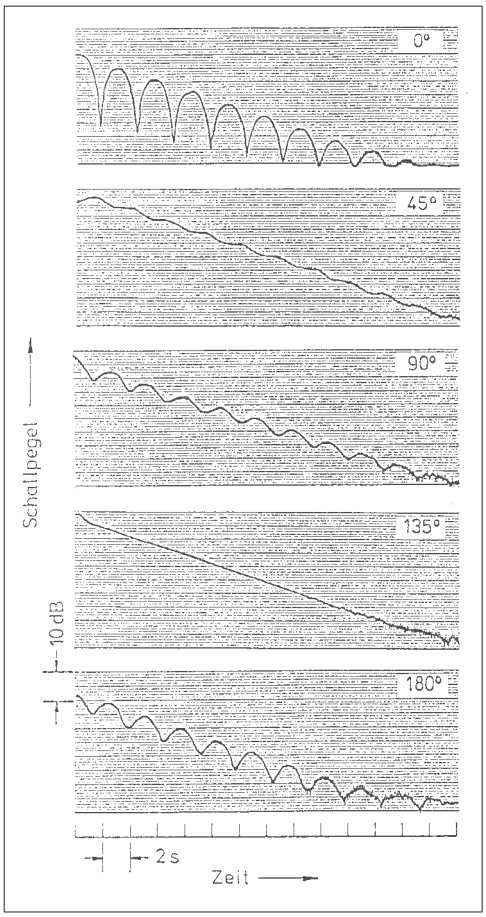

Fig. 18. Schallpegel des I. Teiltones als Funktion der Zeit für unterschiedliche Messwinkel.

4.3. Auswirkungen auf das Schallsignal

Dass daraus Partialschallfelder resultieren, die ebenfalls im Winkel gegeneinander versetzt sind, ist in Fig. 16 dargestellt. Fig. 18 illustriert am Beispiel des I. Teiltones, welche Folgen deren Überlagerung für das Schallsignal einer Glocke haben kann. Ein elektrodynamischer Schwingerreger wurde gegen stets dieselbe Stelle der Glocke gedrückt und mit einer Frequenz betrieben, die so gewählt war, dass beide Partialschwingungen angeregt wurden. Nachdem der Erreger die Glocke zum Schwingen gebracht hatte, wurde er abgenommen und das abklingende Schallsignal im reflexionsarmen Raum unter verschiedenen Messwinkeln mit dem Pegelschreiber aufgezeichnet. Fig. 18 macht deutlich, welche Unterschiede dabei auftreten können. Es gibt Messwinkel (z.B. 45^0 oder 135^0), unter denen der Pegel glatt mit einer Nachhallzeit T_{60} von etwas mehr als 30 Sekunden abfällt. Offenbar strahlt in diese Richtungen nur eine Partialschwingung ab. Dazwischen liegen Winkel, unter denen mehr oder weniger ausgeprägte Schwebungen zu beobachten sind. Diese haben ihren Grund darin, dass an den betreffenden Orten beide Partialschwingungen Schall ähnlicher Amplitude, aber leicht unterschiedlicher Frequenz hervorrufen. In der Summe führt dies zum An- und Abschwellen des Pegels mit einer Schwebungsfrequenz, die mit 0,4 Hz gleich der Differenz der Partialtonfrequenzen ist. Diese Erscheinungen hängen sowohl vom Anregungs- als auch vom Abhörort ab und prägen sich für jeden Teilton unterschiedlich aus (*Fleischer (1997)*).

4.4. Zusammenfassende Bemerkung

Das Moden-Splitting stellt bei Glocken den Normalfall dar. Im Klangspektrum kann jeder Teilton grundsätzlich doppelt auftreten; Schwebungen sind die Folge. Es ist zu vermuten, dass eine größere Aufspaltung der Teiltonfrequenzen zur Wahrnehmung schneller Schwankungen bis hin zur Rauhigkeit führt, was als unangenehm empfunden wird. Eine geringe Aufspaltung der Teiltonfrequenzen könnte dagegen erwünscht sein, da sie eine langsame Modulation hervorruft und - ähnlich wie der Doppler-Effekt, der aus der Pendelbewegung der geläuteten Glocke resultiert - den Glockenklang lebendig erscheinen lässt.

5. Psychoakustische Untersuchungen

Für die adäquate Interpretation der physikalischen Ergebnisse ist von fundamentaler Bedeutung, in welche Hörempfindungen sich das Schallsignal der Glocke umsetzt. Dabei spielt die Tonhöhe eine zentrale Rolle. Obwohl der Glockenklang eine Vielzahl von Teiltönen umfasst, misst ihm das Gehör eine (manchmal auch mehrere) ganzheitliche Tonhöhe zu, die als "Schlagtonhöhe" bezeichnet wird. Glockensachverständige wissen, dass diese Tonhöhe selten allein anhand der Teiltonfrequenzen vorhergesagt werden kann. Die Schlagtonhöhe kann mit der Spektraltonhöhe eines messbaren Teiltones übereinstimmen, was im Einklang mit den Vorstellungen von *Chladni (1787)* und *Rayleigh (1890)* ist. Eigene Untersuchungen mit Glockenspielglocken (z.B. *Fleischer (1997)*) belegen, dass dies häufig bei hoch abgestimmten Glocken der Fall ist. Bei Kirchenglocken, die relativ tief gestimmt sind, wird dagegen in aller Regel eine Tonhöhe wahrgenommen, die nicht mit einem Teilton korreliert. Dieses Phänomen als "Residualtonhöhe" zu verstehen, die erst beim Hören entsteht, geht auf *Schouten (1940)* zurück; vgl. *Bruhn (1980)*. Sie wird heute als "virtuelle Tonhöhe" (*Terhardt und Seewann (1984)*, *Terhardt (1998)*), d.h. als das Ergebnis spektraler Gestaltwahrnehmung, gedeutet.

5.1. Tonhöhenvergleiche

Die Psychoakustik (z.B. *Zwicker und Fastl (1999)*) liefert das Verständnis und die Verfahren, Schalle reproduzierbar darzubieten und Versuchspersonen gezielt zu befragen, um Auf-

schluss über ihre Hörempfindungen zu erhalten. Ein orientierender Vorversuch im Zusammenhang mit der hier betrachteten Glocke ist in Fig. 19 dokumentiert. Zehn Versuchspersonen ("der Mann von der Strasse") hatten die spontan empfundene Tonhöhe des Glockenklanges anhand der Frequenz eines Sinustones zu charakterisieren. Dass die Urteile ungeübter Hörer von denen ausgebildeter Musiker abweichen können, ist spätestens seit den Untersuchungen von *Houtsma und Tholen (1987)* bekannt. Die Frequenz des Vergleichstones konnte so lange verändert werden, bis die Tonhöhen beim Wechsel zwischen Glockenklang und Ton als gleich beurteilt wurden. Fig. 19a zeigt das (objektive) Spektrum des Klanges. Über derselben Frequenzskala ist in Fig. 19b als subjektives Ergebnis die Häufigkeit aufgetragen, mit der die Versuchspersonen einen Ton der betreffenden Frequenz als gleich hoch wie den Klang der Glocke beurteilten. Die Antworten häufen sich bei 512 Hz (I. Teilton) und 256 Hz. Dieses Ergebnis gibt Hinweise auf Eigenheiten, die bei Tonhöhenvergleichen mit Glocken auftreten:

1. Die (in der Mehrzahl ungeübten) Versuchspersonen antworten, besonders hinsichtlich der Oktavlage, wenig einheitlich.
2. Neben Tonhöhen (≅ 512 Hz), die eine Entsprechung im physikalischen Spektrum haben, scheinen auch virtuelle Tonhöhen (≅ 256 Hz) eine Rolle zu spielen.

Offenbar wird die Tonhöhe von Glockenklängen weder als stark ausgeprägt empfunden, noch stets einheitlich beurteilt. Sie ist nicht immer nur von Spektraltonhöhen, sondern häufig auch von virtuellen Tonhöhen bestimmt. Für die Berechnung der Letzteren existiert keine einfache Regel, die ausschließlich auf Frequenzintervallen basiert. Vielmehr sind auch die Pegel und die Frequenzlage der Teiltöne von grundlegender Bedeutung.

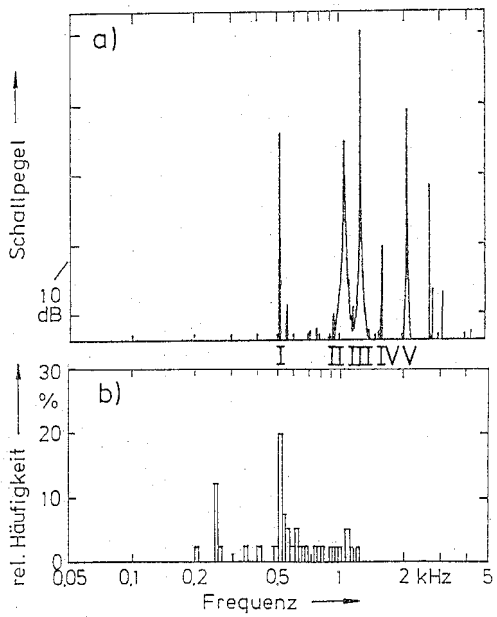

Fig. 19. Tonhöhenvergleich des Glockenklanges mit einem Sinuston. a) Schallpegel-Frequenz-Spektrum unmittelbar nach dem Anschlag; b) relative Häufigkeit der von den Versuchspersonen im jeweiligen Intervall eingestellten Vergleichsfrequenzen.

5.2. Gehörrichtige Analyse

Neben dem direkten psychoakustischen Experiment bietet sich ein weiterer Weg an, Schallsignale auf ihre gehörrelevanten Merkmale zu reduzieren. Es ist dies die "gehörrichtige Analyse". Sie basiert auf psychoakustischen Funktionsschemata (*Terhardt (1998), Zwicker und Fastl (1999)*), die in Algorithmen umgesetzt und am Computer ausführbar sind. Auch auf geringharmonische perkussive Schallsignale ist sie bereits mit Erfolg angewandt worden (*Valenzuela (1999)*).

Der Glockenklang wurde im ersten Schritt einer gehörangepassten Kurzzeit-Spektralanalyse mit anschließender Konturierung unterzogen. Fig. 20a zeigt das resultierende Teilton-Zeitmuster des Glockenklanges, das manchmal auch als auditorisches Spektrogramm bezeichnet wird. Es stellt das gehöradäquate Äquivalent zum Pegel-Frequenz-Zeit-Diagramm von Fig. 3 dar. Unter Berücksichtigung von Eigenschaften des Gehörs kann das Teilton-Zeitmuster weiter reduziert werden. So wurde im nächsten Bearbeitungsschritt (Fig. 20b) der spektralen Maskierung Rechnung getragen. Dabei zeigt sich insbesondere, dass der IV. Teilton (Quinte) zwar physikalisch vorhanden, aufgrund zu geringer Amplitude für das Hören jedoch ohne Bedeutung ist. Mit Einschluss des sechsten Teiltones (3,14 kHz; Duodezime) reduziert sich das Muster auf insgesamt fünf gehörrelevante Teiltöne. Davon ausgehend können beispielsweise nach *Terhardt (1998)* Spektraltonhöhen und - unter Berücksichtigung des dominanten Spektralbereichs - virtuelle Tonhöhen samt den zugehörigen Gewichten berechnet werden. *Valenzuela (1999)* hat gezeigt, dass sich auf diese Weise die Resultate der Tonhöhenvergleiche von Fig. 19 interpretieren und nachbilden lassen.

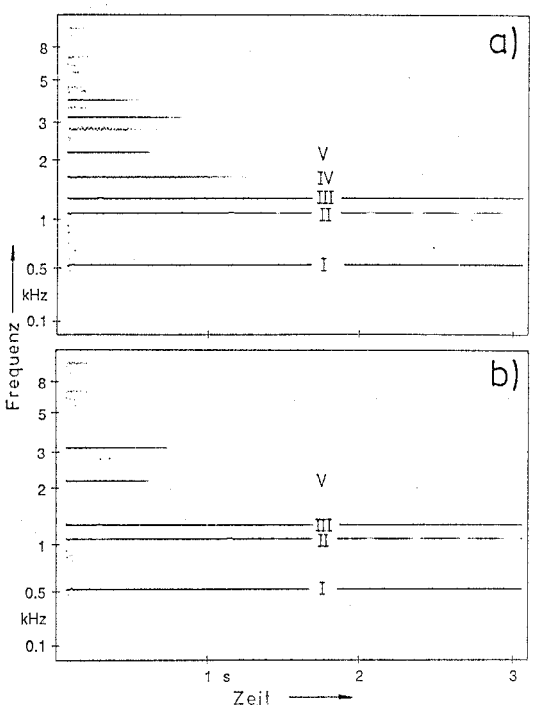

Fig.20. a) Unbearbeitetes Teilton-Zeitmuster des Glockenklanges; b) bearbeitet unter Berücksichtigung der spektralen Maskierung *(Valenzuela (1999)*). Der Pegel, hier nur unzureichend in Grautönen kodiert, wird im Original durch Farben repräsentiert.

Im Teilton-Zeitmuster lassen sich darüber hinaus Parameter gezielt manipulieren; das jeweils zugehörige Schallsignal kann auralisiert werden. So könnten Teiltöne entfernt und durch Hörvergleich des veränderten mit dem originalen Schallsignal die Rollen studiert werden, die diese Teiltöne für die Hörempfindung tatsächlich spielen. Durch Erhöhung der Frequenz ließe sich das Intervall des III. Teiltones von einer Moll- in eine Dur-Terz verwandelt und auf diese Weise eine Kleine-Terz-Glocke direkt mit der entsprechenden Große-Terz-Glocke vergleichen. Offenkundig birgt diese computergestützte Vorgehensweise ein großes Potenzial, offene Fragen hinsichtlich der Rolle physikalisch messbarer Parameter der Schwingung und des Schallsignals auf die Hörempfindung systematisch zu untersuchen.

5.3. Zusammenfassende Bemerkung

Psychoakustische Erkenntnisse sind der Schlüssel zum Verständnis der Glocke. Erst die Berücksichtigung der Eigenschaften des Gehörs macht es möglich, die physikalischen Daten adäquat zu bewerten. Die gehörrichtige Analyse reduziert die Glockenklänge auf diejenigen Parameter, die für das Hören

tatsächlich relevant sind. Sie rechtfertigt es, die Betrachtungen auf eine eng begrenzte, objektiv begründete Zahl von Teiltönen und zugehörigen Moden zu beschränken. Sie belegt das besondere Gewicht von Teiltönen im Prinzipalbereich, gibt grundlegende Hinweise für die zielgerichtete Optimierung von Glockenformen und liefert die Basis für weiterführende Studien.

6. Diskussion und Ausblick

In der vorliegenden Zusammenstellung wurden eingangs die Biegeschwingungen des Glockenkörpers behandelt. Diese haben fundamentale Bedeutung, da sie ursächlich für die Generierung ebenso wie für die Abstrahlung des Signals der Glocke sind. Ihre Erforschung mit modernen experimentellen und theoretischen Verfahren ist eine lohnende Aufgabe. Insbesondere die Berechnung der Schwingungsfrequenzen mittels numerischer Methoden sollte weiterhin vervollkommnet werden. Sie eröffnet die Möglichkeit, die Rippe zielführend zu gestalten. Für den Gießer ist dies von besonderer Wichtigkeit, da sich eine neue Kirchenglocke in aller Regel in ein vorhandenes Geläut einpassen muss. Nach dem Guss sollte sie am besten überhaupt nicht oder höchstens nur noch minimal verändert werden. Darüber hinaus wäre es von Interesse, die natürliche Anfangsbedingung, d.h. die Anregung der pendelnd geläuteten Glocke durch den Klöppel, zu untersuchen, die den Gesamtpegel des Schallsignals sowie die Relationen der Teiltonamplituden bestimmt.

Perrin et al. (1993) haben an einer 214 kg-Glocke im Bereich bis 9 kHz experimentell 134 Schwingungsmoden nachgewiesen. Computerberechnungen können eine noch größere Zahl von Einzelresultaten liefern. Jedoch ist nur ein Bruchteil davon für die Hörempfindung tatsächlich von Belang. Diesen Moden und den Teiltönen, die sie hervorrufen, auf nachvollziehbare Weise ihren angemessenen Stellenwert zuzuordnen, ist von grundlegender Notwendigkeit. Den Weg dazu weist die gehörrichtige Analyse mit ihrer Reduktion der Fülle von physikalischer Information auf das, was für das Hören relevant ist. Das Schallsignal so weit wie möglich in der Art zu behandeln, wie das Gehör es tut, liefert die Legitimation, Rechen- oder Messdaten angemessen - eben gehöradäquat - zu bewerten.

Den perkussiven, schwebungsbehafteten Klang mit dem geringharmonischen Spektrum, den eine Glocke hervorbringt, durch das Gehör zu analysieren, ist eine anspruchsvolle Aufgabe; Glockensachverständige wissen dies. Dieses Schallsignal instrumentell zu untersuchen, stellt hohe Anforderungen an das Analyseverfahren. Im Hinblick auf Glocken sind die Schlagtonhöhe und deren Ausgeprägtheit wesentliche Kriterien. Die Zusammenhänge dieser Hörempfindungen mit dem physikalischen Reiz sind alles andere als unmittelbar und einfach. Noch ist das geschulte Gehör des Sachverständigen nicht obsolet. Es verspricht jedoch Erfolg, zumindest im Vorfeld gehörrichtige Untersuchungsverfahren einzusetzen und anhand der praktischen Erfahrungen weiter zu vervollkommnen. Dies könnte in Kombination mit Computerberechnungen eine Art "Sound Quality Design" an Glocken ermöglichen und dadurch die traditionelle handwerkliche Herstellung unterstützen, zielsicherer sowie profitabler machen. Darüber hinaus lassen sich neue Entwicklungen, wie etwa die geschlitzten Aluminiumglocken (*Tarnoczy (1990)*), durch wissenschaftliche Untersuchungen begleiten und damit rascher zum gewünschten Ziel führen.

Glocken sind etwas unhandliche, aber dankbare Objekte für wissenschaftliche Untersuchungen. Zum einen sind noch so viele Fragen aus den Welten der Physik und der Hörempfindungen offen, dass sie eine Herausforderung für Akustiker jedweder Ausrichtung darstellen. Zum anderen sind Glocken faszinierende Gegenstände und respekteinflössende Zeugnisse von Geschichte, Kultur und Handwerkskunst. Und nicht zuletzt: Mit ihnen umzugehen, macht einfach Freude.

Literatur

Bruhn, G., Über die Hörbarkeit von Glockenschlagtönen. Kölner Beitr. zur Musikforschung 90. Bosse, Regensburg 1980.

Chladni, E.F.F., Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Weidmanns Erben und Reich, Leipzig 1787.

Euler, L., Tentamen de sono camanarum. Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae X (1764), 261-281.

Fleischer, H., Die Glocke. Teil I: Mechanische und akustische Experimente. Forschungsbericht 02/89 aus dem Institut für Mechanik, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, UniBw München, Neubiberg 1989.

Fleischer, H., Spinning Modes. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Gebiet Technische Mechanik und Flächentragwerke 1/94. Hrsg. F.A. Emmerling und A.H. Heinen, UniBw München, Neubiberg 1994.

Fleischer, H., Glockenschwingungen. Beiträge zur Vibro- und Psychoakustik 1/97. Hrsg. H. Fleischer und H. Fastl. Universität der Bundeswehr München, Neubiberg 1997.

Fleischer, H., Messen und Berechnen von Glockenschwingungen. In: Glocken und Glockenspiele. 17. Musikinstrumentenbau-Symposium in Michaelstein. Stiftung Kloster Michaelstein, Blankenburg 1998, 240-264.

Hornbostel, E.M. und Sachs, C., Systematik der Musikinstrumente. Zeitschrift für Ethnologie 46 (1914).

Houtsma, A.J.M. und Tholen, H.J.G.M., A carillon with major third bells II. A perceptual evaluation. Music Perception 4 Nr. 3, Frühjahr 1987, 255-266.

Lehr, A., Partial groups in the bell sound. J. Acoust. Soc. Am. 79 (1986), 2000-2011.

Lehr, A., A carillon with major third bells III. From theory to practice. Music Perception 4 Nr. 3, Frühj. 1987, 267-280.

Lehr, A., A statistical investigation of historical swinging bells in West Europe. Acustica 74 (1991), 97-108.

Love, A.E.H., On the small vibrations and deformation of thin elastic shells. Phil. Trans. Roy. Soc. A 179 (1888), 491-546.

Perrin, R., Charnley, T. und DePont, J., Normal modes of the modern English church bell. J. Sound Vib. 90 (1983), 29-49.

Perrin, R. und Charnley, T., A comparative study of the normal modes of various modern bells. J. Sound and Vibration 117 (1987), 411-420.

Rayleigh, J.W.S. Lord, On bells. Phil. Mag. 29 (1890), 1-17.

Rossing, T.D. (Hrsg.), Acustics of bells. Van Nostrand Reinhold, New York 1984.

Rossing, T.D. und Perrin, R., Vibration of bells. Applied Acoustics 20 (1987), 41-70.

Schad, C.-R., Wörterbuch der Glockenkunde. Hallwag, Bern 1996.

Schad, C.-R. und Frik, G., Klangfiguren einer Glocke. Acustica 78 (1993), 46-54.

Schoofs, B., van Asperen, F., Maas, P. und Lehr, A., A carillon with major third bells I. Computation of bell profiles using structural optimization. Music Perception 4 Nr. 3, Frühjahr 1987, 245-254.

Schouten, J.F., The residue, a new component in subjective sound analysis. Proc. Konikl. Ned. Akad. Wetenschap. 43 (1940), 356-365.

Tarnoczy, T., Experiments on aluminium bells with vertical slits. Acustica 72 (1990), 288-291.

Terhardt, E., Akustische Kommunikation. Springer, Berlin 1998.

Terhardt, E. und Seewann, M., Auditive und objektive Bestimmung der Schlagtonhöhe von historischen Kirchenglocken. Acustica 54 (1984), 129-144.

Valenzuela, M.N., Zur Rolle des Gehörs bei akustischen Untersuchungen an Musikinstrumenten. Beiträge zur Vibro- und Psychoakustik 1/99. Hrsg. H. Fleischer und H. Fastl. Universität der Bundeswehr München, Neubiberg 1999.

Zwicker, E. und Fastl, H., Psychoacoustics. Facts and models. 2. Aufl. Springer, Berlin 1999.