

Nachbildung eines "zweidimensionalen" Schallfeldes in einem begrenzten Volumen mit einer minimierten Anzahl von Schallquellen

D.Krahé, M. Trimpop

Bergische Universität Wuppertal , krahe@uni-wuppertal.de

Institut für Lärmschutz, Düsseldorf,

Einleitung

Ein Schallfeld kann innerhalb eines begrenzten, quellenfreien Volumens vollkommen u.a. durch Punktquellen auf der Grenzfläche dieses Volumens nachgebildet werden, wenn diese Punktquellen (theoretisch) höchstens einen Abstand gleich der Hälfte der kürzesten Wellenlänge zueinander haben [1]. Dies führt auch bei zurückhaltender Auslegung der Rahmenbedingungen schnell zu einer erheblichen, kaum zurealisierenden Anzahl von Quellen (Lautsprechern).

Der Aufwand kann reduziert werden, wenn die Quellen, die das vorgegebene Schallfeld (Primärfeld) erzeugen, in einer Ebene liegen, und das Schallfeld innerhalb des Volumens auch nur in dieser Ebene interessiert. Dies entspräche in erster Näherung einer alltäglichen Situation. Damit wäre aber nicht ohne Weiteres das Problem vom Dreidimensionalen auf das Zweidimensionale reduziert, denn natürlich ist die Ausbreitung weiterhin dreidimensional bestimmt. Bei einem hinreichend großen Abstand der Quellen von der Begrenzung des Volumens kann aber davon ausgegangen werden, dass das Schallfeld senkrecht zur Ebene (als Höhe angenommen) praktisch konstant ist und damit die Problemstellung sich auf zwei Dimensionen beschränkt. Ein solches quasi "zweidimensionales" Feld, das bisweilen auch als 2½-dimensionales bezeichnet wird, wird im Folgenden zugrundegelegt.

Wird das synthetische Schallfeld (Sekundärfeld) dem Primärschallfeld in dem Volumen gegenphasig überlagert, so kann dieses im Idealfall ausgelöscht, in der Praxis aber zumindest gedämpft werden (Stichwort: Aktive Lärminderung [1][2]). Die Dämpfung ist umso stärker, je präziser das Primärfeld in Betrag und Phase (negiert) nachgebildet wird. Hier sind die Anforderungen noch strenger als für eine präzisere räumliche Ortung [3]. Speziell in Bezug auf den Betrag können die Ergebnisse wesentlich verbessert werden, wenn sich die Verteilung der Sekundärquellen nicht ebenfalls auf die angesprochene Ebene beschränkt. Die hier vorgestellte Lösung stellt einen Kompromiss zwischen Darstellungsgenauigkeit und Aufwand (Anzahl der Sekundärquellen) dar.

Ansatz

Für eine einfache Betrachtung wird von einem ebenen Schallfeld ausgegangen, das sich in x-Richtung ausbreitet (Abb.1). und innerhalb eines geschlossenen Bereiches (dunkler Bereich) in der xy-Ebene nachgebildet werden soll. Die mit Punkten gekennzeichneten Sekundärquellen sollen den maximal zugelassenen Abstand einhalten und offensichtlich bilden die Quellen mit den gleichen xy-Koordinaten jeweils eine gerade Linienequelle in z-Richtung mit konstantem Belag, da das Primärfeld von z unabhängig ist. D.h. auch wenn das Feld nur in dem begrenzten Bereich der xy-Ebene durch den Ursprung (z=0) nachgebildet werden soll, sind keine Punktquellen, sondern Linienequellen mit auf der Umrandung des Bereiches zu positionieren. Beide Quellenarten unterscheiden sich beim Schalldruckverlauf in der Abhängigkeit des Betrages vom Abstand r zur Quelle. Gleichung (1) gibt den Verlauf bei der Linienequelle wieder

$$p_c(r, t) = \frac{P_{co}}{\sqrt{r}} \cdot e^{j(\omega t - kr + \varphi)} \quad (1)$$

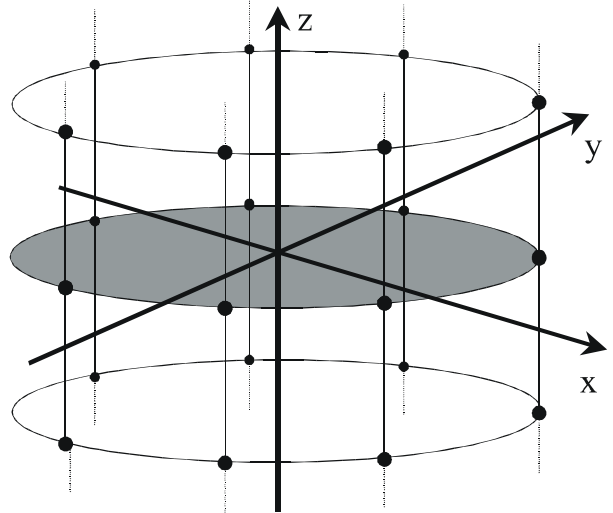


Abb. 1: Zylindrische Anordnung von Sekundärquellen zur Nachbildung eines in der Höhe z konstanten Feldes

während Gleichung (2) die Verhältnisse bei einer Punktquelle beschreibt:

$$p_s(r, t) = \frac{P_{so}}{r} \cdot e^{j(\omega t - kr + \varphi)} \quad (2)$$

Dem Unterschied entsprechend würde sich ein Fehler im Betragsverlauf des Sekundärfeldes einstellen und im hier angedachten Beispiel der ebenen Schallwelle die Amplitude in x-Richtung nicht konstant bleiben, sondern mit wachsendem x abfallen.

Es stellt sich damit konkret die Aufgabe, die in Gleichung (1) gegebene Abhängigkeit mit einer möglichst geringen Anzahl von Punktquellen zu erhalten. Hierzu werden zunächst zwei Punktquellen in unterschiedlicher Höhe positioniert (Abb.2)

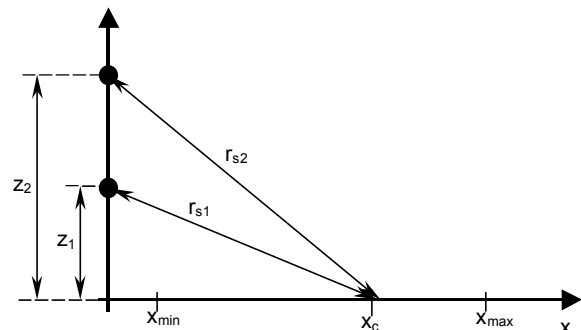


Abb. 2: Anordnung von 2 Punktschallquellen

und deren Felder überlagert. Für den Schalldruckverlauf des resultierenden Feldes gilt dann:

$$p_{total}(x_c) = A_{total} \cdot \sin \left[\varphi_{total} - \frac{2\pi x_c}{\lambda} \right] \quad (3)$$

Berechnung und Ergebnis

Es gilt:

$$A_{total} = \sqrt{\frac{a_{s1}^2}{r_{s1}^2} + \frac{a_{s2}^2}{r_{s2}^2} + 2 \frac{a_{s1} a_{s2}}{r_{s1} r_{s2}} \cdot \cos\left[\varphi_{s2} - \varphi_{s1} - \frac{2\pi(r_{s2} - r_{s1})}{\lambda}\right]} \quad (4)$$

$$\varphi_{total} = \arctan\left[\frac{\frac{a_{s1}}{r_{s1}} \cdot \sin(\varphi_{s1} - \frac{2\pi r_{s1}}{\lambda}) + \frac{a_{s2}}{r_{s2}} \cdot \sin(\varphi_{s2} - \frac{2\pi r_{s2}}{\lambda})}{\frac{a_{s1}}{r_{s1}} \cdot \cos(\varphi_{s1} - \frac{2\pi r_{s1}}{\lambda}) + \frac{a_{s2}}{r_{s2}} \cdot \cos(\varphi_{s2} - \frac{2\pi r_{s2}}{\lambda})}\right] - \frac{2\pi x_c}{\lambda} \quad (5)$$

und

$$r_{s1} = \sqrt{z_1^2 + x_c^2} \quad \text{sowie} \quad r_{s2} = \sqrt{z_2^2 + x_c^2} \quad (6), (7)$$

Dabei ist a_{sx}/r_{sx} die durch die Quelle x bewirkte Druckamplitude im Abstand r_x und φ_{sx} der entsprechende Phasenwinkel. a_{sx} und φ_{sx} gilt es dann so zu bestimmen, dass die Gleichungen (8) und (9) möglichst fehlerfrei erfüllt werden:

$$A_{total} = 1 / \sqrt{x_c} \quad \text{und} \quad \varphi_{total} = \varphi_c \quad (8),(9)$$

Da eine exakte Lösung nur für einen bestimmten Abstand zu erreichen ist, wurde eine Lösung gesucht, die das Fehlerquadrat in einem gegebenen Abstandsintervall ($x_{min} < x < x_{max}$) im Mittel minimiert. Für den Fehler gilt:

$$\overline{error^2} = \frac{1}{x_{max} - x_{min}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(A_{total}^2 + \frac{1}{x} + 2 \frac{A_{total}}{\sqrt{x}} \cdot \cos[\varphi_{total} - \varphi_c - \pi] \right) dx \quad (10)$$

Die Minimierung des Fehler wurde mittels eines numerischen Verfahrens für eine, zwei und drei Punktquellen durchgeführt. Die Ergebnis der Berechnung sind in Tabelle 1 dokumentiert:

Anz.	λ/m	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}	$\varphi_{s1}/^\circ$	$\varphi_{s2}/^\circ$	$\varphi_{s3}/^\circ$	z_1/m	z_2/m	z_3/m	rel. quadr. Fehler
1	alle	1.05			270						1.1 e-1
2	6	1.77	1.28		219	162		0.88	2.50		9.5 e-4
	5	2.03	1.47		226	145		0.90	2.06		1.1 e-3
	4	1.86	1.30		224	153		0.78	1.88		1.0 e-3
	3	1.94	1.33		227	147		0.71	1.54		1.5 e-3
	2	2.30	1.65		236	129		0.63	1.09		2.5 e-3
	1	2.82	2.15		243	113		0.45	0.64		6.3 e-3
	0.5	1.43	0.78		217	146		0.20	0.47		1.5 e-2
	0.3	1.05	0.17		183	1		0.07	1.02		9.3 e-2
	0.1	0.33	0.14		307	237		0.41	0.99		9.5 e-1
3	6	1.40	0.43	1.30	215	244	165	0.76	1.65	2.60	7.4 e-4
	5	1.18	1.46	0.78	216	216	245	0.57	2.34	5.19	1.6 e-4
	4	1.48	1.25	0.44	220	286	136	0.65	2.00	7.80	2.3 e-4
	3	1.43	1.82	1.17	214	260	64	0.58	2.60	4.21	5.7 e-4
	2	1.74	1.34	0.29	230	166	230	0.56	1.27	3.27	2.9 e-4
	1	1.59	1.75	0.78	241	184	104	0.37	0.78	1.13	5.1 e-4
	0.5	1.40	1.13	0.31	232	163	164	0.20	0.45	0.84	2.5 e-3
	0.3	1.39	0.73	0.07	216	145	233	0.15	0.35	1.77	1.7 e-2
	0.1	0.22	0.15	0.06	93	332	266	0.57	1.42	1.99	9.5 e-1

Tab.1: Optimierte Quellenparameter (Amplitude, Phase, Position) bei einer Anzahl von einer, zwei und drei Quellen in Abhängigkeit von der Wellenlänge sowie dem sich im Intervall $0,1m < x < 6m$ ergebende mittlere quadratische Fehler

Zu erkennen ist in Tab.1, dass neben dem Amplituden- und dem Phasenwert auch die Position der Quelle von der Wellenlänge abhängt. Während Amplitude und Phase über Filter beeinflusst werden können, ist letzteres natürlich wenig praktikabel,

Deshalb wurden die Berechnungen noch einmal mit festen Positionen durchgeführt, wobei bei zwei Quellen die Positionen bei $z_1=0,5m$ und $z_2=1m$ lagen, bei drei Quellen bei $z_1=0,25m$, $z_2=0,5m$ und $z_3=1m$. Wie die nachfolgende Abb.3 offenlegt, reduziert sich zwar dadurch der zunächst erhebliche Gewinn beim Einsatz von zwei oder gar drei Quellen, dennoch bleibt eine deutliche Reduktion des Fehler gegenüber der Lösung mit einer Quelle vorhanden:

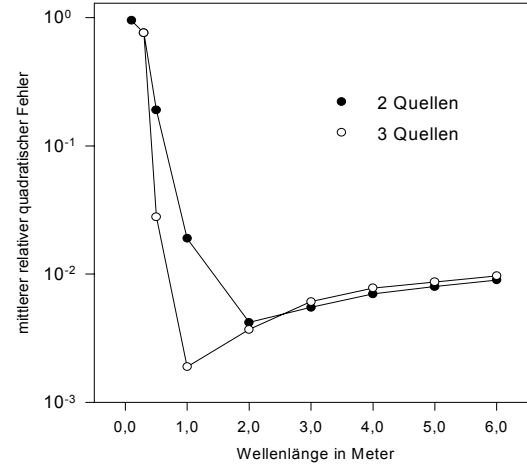


Abb. 3: Mittlerer relativer quadratischer Fehler bei fixierten Quellen in Abhängigkeit von der Wellenlänge

Wie Abb.3 zeigt, liegt der wesentliche Gewinn durch die dritte Quelle bei Wellenlängen zwischen 1 und 2 Metern. Dies liegt daran, dass sich beide Konfigurationen nur durch die Quelle bei $z=0,25m$ unterscheiden, und wie Tabelle 1 zu entnehmen ist, führt die Optimierung für kleinere Wellenlängen zu ebenfalls kleiner Höhenkoordinaten und umgekehrt. Hierauf aufbauend könnte der Verlauf in Abb. 3 noch optimiert werden

Zusammenfassung

Insgesamt kamen die bisherigen Untersuchungen zu folgendem Ergebnis:

- Die Dämpfung eines in der Vertikalen ebenen Primärfeldes kann innerhalb eines begrenzten Bereiches deutlich gesteigert werden, wenn die Sekundärquellen auf der Umrandung die Charakteristik einer Linienquellen statt einer einzelnen Punktquelle aufweisen.
- Die Dämpfung innerhalb des Bereiches variiert bei einer Approximation der Linienquelle weniger stark.
- Die Nachbildung der Linienquelle mit zwei statt mit drei Punktquellen bringt einen weiteren Gewinn, wenn die Dämpfung nicht in einer Ebene, sondern darüber hinaus innerhalb einer Schicht betrachtet wird.

Weitere Untersuchungen stehen an.

Literatur

/1/ Nelson, P.A. ; Elliott, S.J. : Active Control of Sound, Academic Press (London)
 /2/ Trimpop, M. ; Krahe, D. : Simulation der aktiven Schallunterdrückung bei monofrequenten und breitbandigen Geräuschen im Freifeld, DAGA 2000, Oldenburg
 /3/ Sonke, J.J. ; Labeeuw, J. ; de Vries, D. : Variable Acoustics by Wavefield Synthesis: A Closer Look at Amplitude Effects, 104 AES Convention, Amsterdam, Print 4712