

Brechung von begrenzten Schallbündeln

Elfgard Kühnicke (Inst. für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden)

1. Einleitung

Bei der Ultraschall-Prüfung ist eine anwendungsbezogene Anpassung des Prüfverfahrens und des Ultraschallwandlers an die Geometrie des zu prüfenden Objektes und die Lage des Fehlers erforderlich. Bei diesen Optimierungsaufgaben gewinnen Simulationsprogramme zunehmend an Bedeutung. Diese Programme simulieren das Schallfeld im Prüfkörper entsprechend den Prüfkopfparametern und der Prüfanordnung. Aus der Variation der Parameter läßt sich eine bzgl. des Einschallwinkels und der Fokusslage optimierte Prüfanordnung bestimmen. Obwohl die verschiedenen Simulationsprogramme, wie z.B. geometrisch-optische Näherungen, GAUSSsche Wellenbündel und „pencil models“, unterschiedliche Algorithmen zur Berechnung der Wellenausbreitung verwenden, haben sie eine Gemeinsamkeit: die Anwendung des SNELLIUSSchen Brechungsgesetzes oder die Verwendung von ebenen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, was mit der Annahme von unendlich ausgedehnten ebenen Wellen verbunden ist. Das steht im Widerspruch zu den endlich ausgedehnten, im allgemeinen nur wenige Wellenlängen großen Wandlerelementen. Deshalb wird hier der Gültigkeitsbereich des Brechungsgesetzes diskutiert.

2. Abhängigkeit des Brechungswinkels von der Elementgröße

2.1 Fernfeldnäherung - Berechnung von Richtcharakteristiken

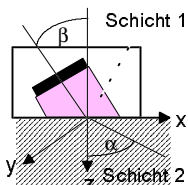


Abb.1: Winkelprüfkopf

Am einfachsten läßt sich die Abhängigkeit des Brechungswinkels von der Elementgröße und der Frequenz an Hand der Fernfeldnäherung für Winkelprüfköpfe erklären, im folgenden als Methode A bezeichnet. Entsprechend Abb.1 ist der Winkelprüfkopf (Schicht 1) an einen Testkörper (Schicht 2) angekoppelt. Der piezoelektrische Schwinger

besitzt die Kantenlänge a in Einschallrichtung (x -Richtung) und b senkrecht dazu. In dieser Näherung wird davon ausgegangen, daß der Schwinger ein „ebenes, begrenztes“ L-Wellenbündel entsprechend seiner Ausdehnung aussendet. Die Welle erzeugt die Spannung

$$\sigma_{zz1 \rightarrow 2}(x, y) = A(\beta) e^{ik_x x \sin \beta} \quad (1)$$

$$\text{für } -a/2 \cdot \cos \beta \leq x \leq a/2 \cdot \cos \beta \text{ und } -b/2 \leq y \leq b/2$$

auf der Grenzfläche zwischen Prüfkopf und Halbraum innerhalb der projizierten Elementfläche. Diese Spannung ist die Anregung für die 2. Schicht. Sie hängt vom Winkel β und den Wellengeschwindigkeiten in beiden Medien ab und ist unabhängig von der y -Koordinate. Somit ist $A(\beta)$ nur eine Funktion des Einschallwinkels β und konstant für alle Punkte innerhalb der projizierten Schwingerfläche. Für die von einer Punktquelle hervorgerufene Verschiebung im Halbraum gilt /5/:

$$u_r^L(r, z, k) \approx \frac{1}{4\pi\rho R} \sigma_{zz1 \rightarrow 2} P^{P^*}(\theta) \cdot e^{-ik_z R} \quad P^{P^*}(\theta) = S^{P^*}(\theta) \cdot \cos \theta \quad (2)$$

Gleichung (2) ist der L-Wellenanteil der Radialkomponente der Verschiebung. Sie ergibt sich aus einer näherungsweise Integralberechnung mit Hilfe der Sattelpunktmethode. R ist der Abstand zwischen Beobachtungspunkt und Quellpunkt, θ ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor R und dem Normalenvektor auf die Grenzfläche im jeweiligen Quellpunkt, k_2 - ist die Wellenzahl in Schicht 2, $S^{P^*}(\theta)$ ist die Quellfunktion für eine Normalspannung an der Grenzfläche. $P^{P^*}(\theta)$ ist die Richtcharakteristik für diese Punktquelle /1/.

$$P^{P^*} = \frac{2(1 - 2c^2 \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta}{\left[(1 - 2c^2 \sin^2 \theta)^2 + 4c^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{c^2 - \sin^2 \theta} \right]} \quad c = \frac{c_{L2}}{c_{L1}} \quad (3)$$

Eine Superposition der Felder aller Punktquellen innerhalb der projizierten Fläche liefert das Feld für die ausgedehnte Quelle. Die durch die L-Welle hervorgerufene radiale Verschiebung im Innern ergibt sich zu:

$$U_R \approx A(\beta) \cdot P(\theta) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{e^{ik_z R}}{R} e^{ik_x R \sin \beta} dx \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Richtcharakteristik des Prüfkopfes werden die Winkel α und γ in der Vertikalebene bzw. der Horizontalebene eingeführt. Für große Abstände R und bei Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit der Quellfunktion läßt sich Integral (4) analytisch auswerten /2/. Für die Vertikalebene ($\gamma=0^\circ$, $\alpha=\theta$) ergibt sich aus (4)

$$U_R(a, \gamma) \approx \frac{abP(\theta) \sin X}{\cos \beta X} \quad X = a\pi f \left[\sin a - \frac{c_{L2}}{c_{L1}} \sin \beta \right] / c_{L2} \cos \beta \quad (5)$$

wobei die Indizes 1 und 2 für die Schicht stehen. Der $\sin X/X$ -Term beschreibt die Abstrahlung eines unendlich ausgedehnten Streifens in FRAUNHOFERScher Näherung. Er hat ein Maximum α_0 für:

$$\sin \alpha_0 = c_{L2}/c_{L1} \sin \beta \quad (6)$$

Gleichung (6) ist das gut bekannte Brechungsgesetz oder SNELLIUSSche Gesetz. Somit beschreibt das Maximum des $\sin X/X$ -Term den Brechungswinkel entsprechend dem SNELLIUSSchen Gesetz. Nach Gleichung (5) resultiert aber das Fernfeld des Prüfkopfes aus dem Produkt von $P(\theta)$ und dem $\sin X/X$ -Term. Der Einfluß der unterschiedlichen Terme hängt von der Elementlänge a und der Frequenz f ab. Für große Elemente überwiegt der Einfluß des $\sin X/X$ -Terms, und deshalb liegt der real auftretende Brechungswinkel dicht bei dem Brechungswinkel nach dem SNELLIUSSchen Gesetz. Der Unterschied zwischen dem real, für das endliche Element, auftretenden Brechungswinkel und dem SNELLIUSSchen Brechungswinkel wächst mit abnehmender Schwingergröße a .

Abb.2 zeigt die berechneten Kurven für $P(\theta)$, für den $\sin X/X$ -Term (beide auf das eigene Maximum normiert) und für die Überlagerung dieser beiden Terme für unterschiedliche Einschallwinkel β . Der Plexiglaskeil des Prüfkopfes hat die Parameter $\rho_1=1.2\text{g/cm}^3$, $c_{L1}=2730\text{ms}^{-1}$, $c_{T1}=1430\text{ms}^{-1}$. Das Material des Testkörpers ist Stahl ($\rho_2=7.77\text{g/cm}^3$, $c_{L2}=5920\text{ms}^{-1}$, $c_{T2}=3230\text{ms}^{-1}$). In Abb.2a ist der resultierende Brechungswinkel annähernd identisch mit dem Maximum des $\sin X/X$ -Terms, und so liefert in diesem Fall das SNELLIUSSche Gesetz annähernd den richtigen Brechungswinkel.

Entsprechend dem SNELLIUSSchen Gesetz ist der kritische Winkel für Totalreflexion bei einem Übergang Plexiglas/Stahl ein Einfallswinkel von $\beta=27.5^\circ$ in Plexiglas. Bei diesem Winkel müßte sich die gebrochene Welle entlang der Grenzfläche ausbreiten, d.h. der Brechungswinkel in Stahl würde $\alpha=90^\circ$ sein. Abb.2b zeigt aber, daß für eine endliche Elementgröße von $a=12\text{ mm}$, $b=6\text{ mm}$ und der Frequenz von $f=2\text{ MHz}$ nur ein Brechungswinkel von ca. 70° erreichbar ist.

2.2 Berechnung von Schallfeldern

Die Grenzen des SNELLIUSSchen Gesetzes zur Berechnung des Feldes von begrenzten Schallbündeln wird anhand von harmonischen und transienten Schallfeldern von Winkelprüfköpfen in Stahl demonstriert. Dazu wird der in /3/ erläuterte Algorithmus C verwendet. Methode C basiert auf der Separationsmethode in Verbindung mit zweidimensionalen GREENSchen Funktionen in FRAUNHOFERScher Näherung und einer Punktquellensynthese. Die Separationsmethode beruht auf einer Zerlegung des geschichteten Mediums in einzelne Schichten und einer separaten Feldberechnung in jeder Schicht. Zu diesem Zweck werden das Schwingerelement und alle Grenzflächen diskretisiert und gleichmäßig mit Punktquellen belegt. Das Schallfeld resultiert aus der Überlagerung der Felder aller Elementarpunktquellen. An den Grenzflächen wird die Normalspannungsverteilung in einem gleichmäßigen Punktabstand bestimmt. Jeder Punkt dient dann

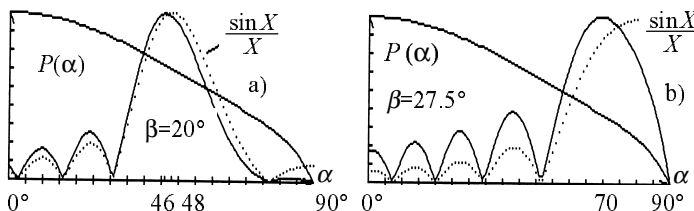
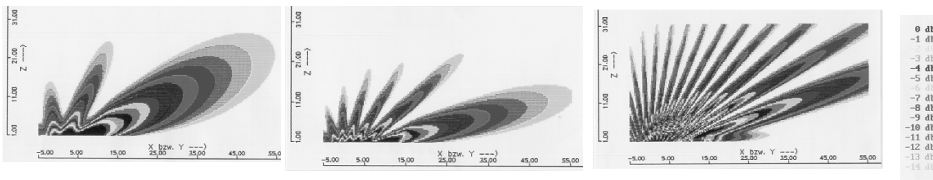
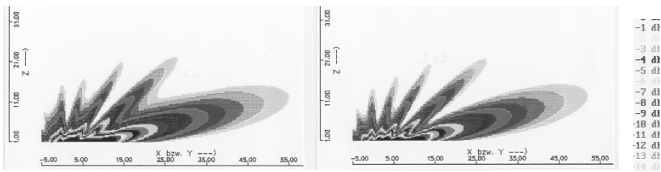


Abb.2: Richtcharakteristik für einen Winkelprüfkopf
 $a=12\text{ mm}$, $b=6\text{ mm}$, $f=2\text{ MHz}$



Frequenz: a) $f=1$ MHz b) $f=2$ MHz c) $f=5$ MHz

Abb.3: Abhängigkeit des Schallfeldes von der Frequenz - harmonisches Schallfeld von einem Winkelprüfkopf in Stahl (Element: 12mm 6mm; Keilwinkel: $\beta=29.6^\circ$)



Anregungsfunktion: 1 Periode 2 Perioden

Abb.4: Abhängigkeit des Schallfeldes von der Anregungsfunktion (Methode C) (12mm 6mm, $\beta=29.6^\circ$; $f=2$ MHz)

als neue Punktquelle für die angrenzende Schicht. Das transiente Feld wird aus einer Überlagerung der harmonischen Felder (harmonische Synthese) und anschließender Faltung mit der Anregungsfunktion berechnet.

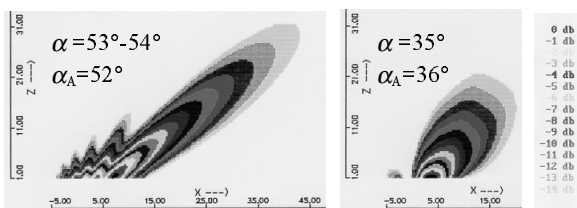
Abb.3b zeigt das Schallfeld eines für die oberflächennahe Prüfung angepassten Prüfkopfes. Er arbeitet mit einem Einschallwinkel in Plexiglas von $\beta=29.6^\circ$, d.h. mit einem Winkel etwas größer als der kritische. Von diesem Prüfkopf ausgehend wird in Abb.3a und 3c die Frequenz geändert. Somit demonstriert Abb.3 die Abhängigkeit des Schallfeldes von der Frequenz. Eine Erhöhung der Frequenz bewirkt eine Erhöhung des Brechungswinkels α in Stahl (Abb.3a, 3b) verbunden mit einem starken Anwachsen der Nebenstrukturen. Bei einer Frequenz von ungefähr 4 MHz werden die Nebenstrukturen größer als die letzte Keule und so sinkt der Brechungswinkel α (Abb.3c).

Abb.4 zeigt das transiente Schallfeld für eine Zeitanregung mit einem Sinus-Burst von 1 und 2 Perioden bei einer Mittenfrequenz von 2 MHz /3/. Es ist ersichtlich, daß die Abhängigkeit des Brechungswinkels von der Zeitdauer des Anregungssignals klein im Vergleich zur Frequenzabhängigkeit (Fig.3) ist. Ein Vergleich mit Fig.3b zeigt ferner, daß das harmonische Schallfeld bei der Mittenfrequenz, auch bei kurzen Anregungen mit nur einer Sinus-Schwingung, eine gute Näherung für das transiente Schallfeld ist.

Abb.5 demonstriert, daß das SNELLIUSsche Gesetz für kleine Elemente falsche Brechungswinkel liefert. Das gilt auch für Einschallwinkel, die nicht in der Nähe des Grenzwinkels der Totalreflexion liegen. Diese Tatsache wird häufig nicht berücksichtigt. Die Schallfelder und die Brechungswinkel α in Abb.5 wurden mit Hilfe von Methode C berechnet; die zusätzlich angegebene Brechungswinkel α_A wurden mit der Fernfeldnäherung A bestimmt. Für einen Einschallwinkel $\beta=22^\circ$ erreicht das kleine Element $a=3$ mm nur einen Brechungswinkel von ca. $\alpha=36^\circ$. (Der Brechungswinkel nach SNELLIUS müßte 55° sein.) Die Beispiele in Abb.3 und 5 zeigen, daß der Brechungswinkel extrem von Elementgröße und Frequenz abhängt.

3. Punktquellenabstand

Viele Schallfeldberechnungsprogramme verwenden ebene Reflexions- oder Transmissionskoeffizienten verbunden mit einer Zerlegung der Quelle in einzelne Elementarpunktquellen. Da diese Programme somit auch von einer Überlagerung ebener Wellen ausgehen, ist der Punktquellenabstand und der Abstand der Schnittpunkte



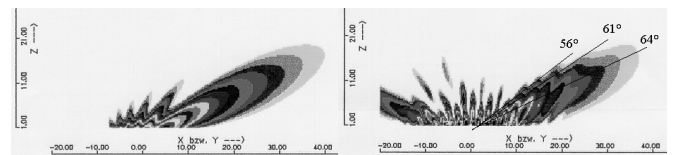
a) $a=12$ mm, $b=6$ mm b) $a=b=3$ mm

Abb.5: Abhängigkeit des Schallfeldes von der Elementgröße - Winkelprüfkopf ($\beta=22^\circ$, $f=2$ MHz)

der Strahlen mit der Grenzfläche von entscheidender Bedeutung für ihre Genauigkeit. Der Punktquellenabstand wird mit Hilfe von Methode C diskutiert. Aufgrund der separaten Berechnung in jeder Schicht eröffnet diese Methode die Möglichkeit den Punktabstand auf jeder Grenzfläche individuell entsprechend der Wellenlänge in der folgenden Schicht zu wählen.

In Abb.6 beschreiben d_1 und d_2 den Punktabstand auf der Grenzfläche zu Schicht 1 (Element) und zu Schicht 2 (zwischen Prüfkopf und Testkörper). λ ist die Wellenlänge in Plexiglas bzw. Stahl. Abb.6 zeigt, daß ein Punktabstand von $d_1=\lambda_{Pl}/2$ und $d_2=\lambda_{St}/2$ nicht ausreicht. Durch den numerischen Fehler, der durch die zu grobe Punktbelegung verursacht wird, treten zusätzliche Strukturen im Nahfeld auf und bei diesem Beispiel auch ein ausgeprägtes, zusätzliches Schallbündel in entgegengesetzter Richtung. Diese Schallbündel in der falschen Richtung treten im Bereich des kritischen Winkels auf und nehmen mit wachsendem Einschallwinkel zu. Die Fehler im Nahfeld erscheinen auch schon bei kleinen Einschallwinkeln. Das ist besonders wichtig bei der Berechnung des Schallfeldes in vielschichtigen Systemen (z.B. Berechnung des Schallfeldes im menschlichen Auge /4/).

4. Schlußfolgerungen



$d_1=\lambda_{Pl}/5$, $d_2=\lambda_{St}/5$ $\alpha=65^\circ$ $d_1=\lambda_{Pl}/2$, $d_2=\lambda_{St}/2$ $\alpha=56^\circ-64^\circ$

Abb.6: Einfluß des Abstandes der Quellpunkte - Methode C (Element: 12mm 6mm; $\beta=26^\circ$; $f=2$ MHz)

In vielen Fällen ist das Brechungsgesetz zur Berechnung des Brechungswinkels eines in beiden Richtungen begrenzten Schallbündels nicht anwendbar. Der Brechungswinkel des von einem begrenzten Element abgestrahlten Schallfeldes hängt extrem von der Elementgröße und der Frequenz der Anregungsfunktion ab. Anhand von Simulationsrechnungen für Schallfelder von Ultraschall - Winkelprüfköpfen, wie sie in der Zerstörungsfreien Prüfung verwendet werden, wurde gezeigt, daß das Brechungsgesetz bei kleinen Schwingern (in der Größenordnung der Wellenlänge) und im Bereich des Grenzwinkels der Totalreflexion, auch bei Schwingern in der Größenordnung von einigen Wellenlängen, bis zu 20° abweichende Brechungswinkel liefert.

Weiterhin wurde die Exaktheit von Algorithmen, die ebene Reflexions- und Transmissionskoeffizienten in Verbindung mit einer Diskretisierung der Quellfläche verwenden, diskutiert. Es wurde gezeigt, daß ein Punktquellenabstand von einer halben Wellenlänge nicht ausreichend ist, insbesondere zur Berechnung des Schallfeldes in mehrschichtigen Systemen. Ein Punktquellenabstand von $\lambda/5$ bis $\lambda/7$ entsprechend der Wellenlänge in der Schicht wird vorgeschlagen.

5. Literatur

- /1/ E. Kühnicke; Directional field of a point source for calculation of three-dimensional harmonic waves in layered media, in Acoustical Imaging vol.22, Plenum Press New York 1996, pp. 9-14
- /2/ H. Wüstenberg; Untersuchungen zum Schallfeld von Winkelprüfköpfen für die Materialprüfung, Diss. Berlin 1972
- /3/ E. Kühnicke; The effects of source configuration on refracted sound fields, Materials Evaluation, March 2000, Vol.58, No. 3, pp.470-475
- /4/ E. Kühnicke; Simulationsrechnungen für monofrequente Schallfelder in geschichteten Medien, DAGA 94, 20. Jahrestagung für Akustik, Dresden, 1994, in Fortschritte der Akustik S. 885 - 888
- /5/ G.F.Miller, H.Purse; The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid, Proc. R. Soc.London Ser.A 223, 521-541, (1954)