Zur Regel von den sechs Elementen pro Wellenlänge bei BEM

STEFFEN MARBURG
Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität, 01062 Dresden

1 Einleitung

Für elementbasierte Berechnungsverfahren der numerischen Akustik hat sich in den letzten beiden Dekaden die Meinung durchgesetzt, daß die Elementgröße an die Wellenlänge gekoppelt werden sollte. Meist wird deshalb die Elementgröße in einer bestimmten (festen) Anzahl von Elementen pro Wellenlänge gemessen. Diese Anzahl wird vielfach für lineare bzw. bilineare oder für konstante Elemente angegeben. Sie liegt meist zwischen sechs und zehn. Es erscheint logisch, daß diese Zahl eng an eine angestrebte Genauigkeit gekoppelt ist. Die zulässige Fehler wird allerdings häufig auch nicht klar definiert. Er ist im allgemeinen von einer akzeptablen Größe, die sich technischen Gegebenheiten anpaßt und vom Anwender abhängt. Beispiel für Finite–Elemente–Methoden findet man in [5, 8] und für Randelementemethoden in [5, 6]. Es ist zu vermuten, daß diese Regel auf dem Abtasttheorem von SHANNON basiert. Während bei der einfachen Detektion von Frequenzen wenigstens zwei Punkte pro Wellen genügen, um deren Charakteristik zu erkennen, kommt man mit derartig wenig Information offenbar nicht aus, wenn man eine Funktion approximieren will.

THOMPSON und PINSKY [8] diskutierten diese Frage anhand eines eindimensionalen Stabes für finite Elemente bis zu einem Polynomgrad von fünf. Sie empfahlen, wenigstens zehn lineare Elemente pro Welle zu verwenden. Im weiteren nannten sie die als Faustregel drei quadratische oder alternativ zwei kubische Elemente pro Wellenlänge, um die gleiche Fehlerschranke zu unterschreiten. Für höhere Genauigkeit sollte man den Polynomgrad weiter erhöhen und die Zahl der Elemente bei zwei pro Wellenlänge festhalten. IHLENBURG's umfassende Studie zur Fehleranalysis bei finiten Elementen [4, Kap. 4], die auf verschiedenen Arbeiten mit BABUŠKA basiert, begann gleichfalls mit der Regel von den sechs (linearen) Elementen pro Wellenlänge. Theoretisch nachweisen und in eindimensionalen numerischen Beispielen untermauern konnte er diese Regel, die man auch mit $kh < 1$ formulieren kann, für kleine Wellenzahlen, während sie für große Wellenzahlen nicht mehr gilt. Allerdings zeigt sich, daß die aus asymptotischen mathematischen Abschätzungen gewonnene Regel $k^2h < 1$ zu scharf ist. In einem seiner eindimensionalen Beispiele ermittelte IHLENBURG die Zahl finiter Elemente, um in der H^1–seminorm unter bestimmten Fehlerschranken zu bleiben. Bei einer Wellenzahl von $kl = 30\pi$ (15 Wellen auf der Länge l) brauchte er 14 lineare, 3.2 quadratische oder 1.7 kubische Elemente pro Wellenlänge, um den Fehler unter 50% zu drücken. 33 lineare, 5.1 quadratische oder 2.3 kubische Elemente wurden für Fehler unter 10% benötigt, und immerhin 188 lineare, 12 quadratische oder 4.3 kubische ließen den Fehler unter 1% sinken. Es sei erwähnt, daß die H^1–Seminorm ein stärkeres Fehlermaß als die (unter Ingenieuren) verbreitetere Quadratmittelnorm bezeichnet. In der erwähnten Studie findet man auch Ergebnisse für Polynome höheren Grades. Hier sei auf die Quelle [4, S. 155–157] verwiesen. Die Elementierungsregel wurde von Ihlenburg in verallgemeinerter Form für Polynome vom Grad $p > 1$ mit $kl\,(kh/p)^p < 1$ angegeben. Man entnimmt ihr die Empfehlung, drei quadratische oder zwei kubische Elemente pro Wellenlänge zu verwenden, um verläßliche Lösungen zu ermitteln. Beim Vergleich des Rechenaufwands erwiesen sich je nach gewünschter Genauigkeit quadratische und kubische Elemente für dieses eindimensionale Beispiel als optimale Wahl.

Geht man zu Randelementemethoden über, so lassen sich einige Arbeiten finden, in denen die Regeln der Finite–Elemente–Methoden übernommen wurden. So empfahl man sechs lineare Elemente pro Wellenlänge in [5]. In [6] wurde sie sogar für konstante Elemente angewandt. MAKAROV und OCHMANN [6] hatten in dieser Arbeit erwähnt, daß sie die Genauigkeit testeten und für ausreichend befanden, um die Streuung an einer Kugel mit einem herausgeschnittenen Oktanten bis zu einer Wellenzahl von $kr = 20\pi$ (r als Kugelradius) zu berechnen. ZALESKI [9] untersuchte, welche Diskretisierung für die Schallabstrahlung von kompliziert geformten Gebilden nötig sei. Auch er bestätigte, daß sechs lineare Elemente pro Wellenlänge ausreichten, um eine technisch vertretbare Genauigkeit zu erzielen. Nach seinen Untersuchungen ergaben sich gleichwertige Ergebnisse mit mehr als zwei und weniger als drei quadratischen Elementen pro Welle, wobei der untersuchte Frequenzbereich relativ niedrig lag. Zu bemerken ist, daß in keiner der erwähnten Arbeiten Abnormitäten in der Konvergenz für hohe Frequenzen beobachtet wurden. Eine Fehleranalysis für Randelementemethoden in der numerischen Akustik findet man zum Beispiel bei HSIAO und KLEINMANN [3]. Allerdings erlaubt diese Arbeit wieder keinen Rückschluß auf die Netzgröße. GIEBERMANN [2] wies in seiner Dissertation nach, daß die BEM–Lösung zumindest für die Galerkin–Diskretisierung immer einen Fehler der Ordnung kh liefert. Diese Erkenntnis bestätigt dann auch die These, daß eine feste Anzahl von Elementen pro Wellenlänge unabhängig von der Größe der Wellenzahl als Regel angewandt werden sollte, zumindest für die Galerkin–BEM. Hierin sei das Augenmerk auf die Kollokation und dabei speziell auf konstante, lineare und quadratische Elemente gerichtet. Die Untersuchungen konzentrieren sich hauptsächlich auf numerische Beispiele.

2 Gleichmäßig vernetztes langes Rohr

Betrachten wir nun die Wellenausbreitung in einem luftgefüllten Rohr der Länge $l = 3.4$ m mit quadratischem Querschnitt der Größe 0.2m×0.2m. Für Luft seien die Dichte $\rho = 1.3\,\mathrm{kg/m^3}$ und die Schallgeschwindigkeit $c = 340\,\mathrm{m/s}$. In diesem Falle kann man bei einer Frequenz von 100 Hertz eine Welle im Rohr erwarten. Alle Wände seien schallhart, lediglich ein Ende voll absorbierend, also $Y(l) = (\rho c)^{-1}$. Weiterhin gelte für die Schnelle $v = 0$ außer $v(0) = 1\,\mathrm{m/s}$. Die exakte Lösung des korrespondierenden eindimensionalen Problems für den Schalldruck lautet

$$p(x) \;=\; -\,v_s(0)\,\rho c\, e^{ikx} \;. \tag{1}$$

Der Betrag des Schalldrucks ist überall im Rohr und bei allen Frequenzen konstant. Als Lösung ergeben sich durch das Rohr laufende Wellen. Zuerst sei untersucht, inwiefern sich Dreieckelemente und Viereckelemente unterscheiden. Dazu benötigt man zunächst Netze auf der Oberfläche. Ein Netz mit 17 Viereckelementen entlang der Länge und einem über die Breite zählt insgesamt 70 Viereckelemente der Kantenlänge $h = 0.2$m. Dessen sukzessive Verfeinerung führt auf Netze mit 280, 1120 und 4480 quadratischen Elementen entsprechend jeweils halbierter Abmessungen. Zugehörige Dreiecksvernetzungen lassen sich erzeugen, indem man jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegt. Nützlich erscheint vor der Ergebnispräsentation die Erklärung einzelner Fehlermaße. Für einen Vektor $\boldsymbol{f}$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ kommt die Quadratmittelnorm (Euklidische Norm) oder die Maximumnorm zum Einsatz. Der relative Fehler komplexwertiger Größen sei anhand der Beträge berechnet. Für den Betrag des Schalldrucks sei der relative Fehler auf der Oberfläche mit e_2^Γ bzw. e_∞^Γ bezeichnet, entsprechend analog der Fehler an Punkten im Rohr e_2^Ω und e_∞^Ω. Bezogen werde der Fehler immer auf die exakte Lösung

$$e_2^\Gamma \;=\; \frac{\|\boldsymbol{p}_{\mathrm{num}}^\Gamma - \boldsymbol{p}_{\mathrm{ex}}^\Gamma\|_2}{\|\boldsymbol{p}_{\mathrm{ex}}^\Gamma\|_2}\;. \tag{2}$$

Beim Vergleich des Schalldrucks auf der Oberfläche kann man praktisch keine Unterschiede zwischen Dreieck– und Viereckelementen ausmachen, [7]. In der Arbeit [7] findet man auch ausführliche Darstellungen für die Fehlerabhängigkeit sowohl von der Wellenzahl als auch von der Elementgröße. Die jeweils in der doppelt logarithmischen Skalierung erkennbaren linearen Verläufe der Fehlerfunktionen deuten auf Zusammenhänge der Form

$$e_2^\Gamma(k) \sim C_k(h,\ldots)k^{\alpha_2} \quad \text{und} \quad e_2^\Gamma(h) \sim C_h(k,\ldots)h^{\beta_2} \tag{3}$$

hin. Empirisch aus den numerischen Beispielen ermittelte Werte für α und β bieten die Tabellen 1 und 2.

	h=0.2m		h=0.1m		h=0.05m		h=0.025m	
p	α_2	α_∞	α_2	α_∞	α_2	α_∞	α_2	α_∞
0	0.38	0.33	0.92	0.88	0.89	0.90	0.83	0.84
1	0.64	0.66	1.29	1.45	1.37	1.50	1.41	1.51
2	2.94	3.05	3.07	3.19	2.87	2.80	—	—

Tabelle 1: Exponenten α lt. Gl. (3) für verschiedene p und h

	$kl = 5\pi$		$kl = 10\pi$		$kl = 20\pi$		$kl = 40\pi$	
p	β_2	β_∞	β_2	β_∞	β_2	β_∞	β_2	β_∞
0	1.70	1.71	1.78	1.78	1.82	1.82	1.73	1.49
1	1.83	1.90	1.80	1.90	1.76	1.88	1.58	1.67
2	3.36	3.07	3.83	3.99	3.76	3.85	4.14	4.87

Tabelle 2: Exponenten β lt. Gl. (3) für verschiedene p und kl

Entsprechend der empirischen Werte läßt sich α mit $\alpha = p+1$ im gesamten Frequenzbereich $0 \le kl \le 80\pi$ bestimmen. Die Beobachtung für β zeigt ein anderes Verhalten. In dem Buch von ATKINSON [1] findet man $\beta = p+1$. Allerdings spezifiziert er diese Angabe für sehr regelmäßige Netze bei geradem Polynomgrad (!) auf $\beta = p+2$. Zusammenfassend formuliert man also die Fehlerabhängigkeit mit

$$\begin{array}{lrll} p=0: & \text{beliebiges Netz:} & e^\Gamma(k,h) & \sim\; C\,k\,h \\ & \text{regelmäßiges Netz:} & e^\Gamma(k,h) & \sim\; C\,k\,h^2 \\ p=1: & \text{beliebiges Netz:} & e^\Gamma(k,h) & \sim\; C\,k^2\,h^2 \\ p=2: & \text{beliebiges Netz:} & e^\Gamma(k,h) & \sim\; C\,k^3\,h^3 \\ & \text{regelmäßiges Netz:} & e^\Gamma(k,h) & \sim\; C\,k^3\,h^4 \end{array} \tag{4}$$

Diese Liste kann für Polynome beliebigen Grades ergänzt werden. Im allgemeinen sollte man die Verwendung von Elementen mit geradem Polynomgrad anstreben. In der Arbeit [7] geben mehrere Tabellen an, bis zu welcher Frequenz mit welcher Elementierung und mit welchem Fehler (in beiden angegebenen Normen) gerechnet werden kann. Gleichfalls angegeben ist die Zahl der benötigten Elemente pro Wellenlänge.

3 Weiteres Beispiel und Schlußfolgerungen

In der Arbeit [7] wurde ein weiteres Beispiel untersucht. Am Beispiel des unregelmäßigen Netzes der Fahrerkabine eines Mittelklassewagens bestätigte sich, daß quadratische Elemente schon bei einer sehr groben Vernetzung verläßliche Ergebnisse erwarten lassen. Mit nur 258 quadratischen Elementen werden die Bedürfnisse der Karosserieakustik hinreichend befriedigt. Diese Aussage wird durch die Analyse am verfeinerten Netz bestätigt. In diesem Beispiel zeigt sich, daß die quadratischen Elemente sehr viel schneller konvergieren als die Elemente kleinerer Ordnung.

Aus dieser Arbeit und noch mehr aus [7] wird deutlich, daß die Zahl zu verwendender Randelemente vom Fehlermaß und der gewünschten Genauigkeit abhängt. Während für kleine Fehler von fünf Prozent und weniger die quadratischen Elemente deutlich bessere Ergebnisse bei gleichem Freiheitsgrad liefern, erweisen sich für Fehler um zehn Prozent besonders bei hohen Frequenzen die konstanten Elemente am robustesten. Für zehn Prozent Fehler in der Quadratmittelnorm auf der Oberfläche sind fünf konstante Elemente pro Wellenlänge offenbar ausreichend. Bezieht man sich auf die Maximumnorm, die in vielen technischen Anwendungen wichtig ist, so benötigt man bereits sieben bis acht konstante oder sogar noch mehr lineare Elemente pro Wellenlänge.

Abschließend sei noch einmal die Regel von den sechs Elementen pro Wellenlänge beleuchtet. Man kann feststellen, daß mit dieser Regel bezogen auf lineare Elemente im untersuchten Beispiel des Rohres etwa 8–10% Fehler in der Quadratmittelnorm und 15–20% Fehler in der Maximumnorm zu erwarten sind. Allerdings sind konstante Elemente den linearen durchaus vorzuziehen. Gründe dafür liegen darin, daß konstante Elemente eine orthogonale Basis bilden und auf eine besser konditionierte Systemmatrix führen. Auf einem regelmäßigen Netz zeigen sich die Konvergenzraten bezüglich der Elementgröße für lineare und konstante Elemente gleich, was auf den Superkonvergenzeffekt bei Polynomansätzen gerader Ordnung zurückzuführen ist. Für unregelmäßigere Netze verschwindet dieser Effekt. Generell ist für unregelmäßige Netze mit einem größeren Fehler zu rechnen.

4 Literatur

[1] K. E. Atkinson. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind.* Cambridge University Press, 1st edition, 1997.

[2] K. Giebermann. *Schnelle Summationsverfahren zur numerischen Lösung von Integralgleichungen für Streuprobleme im R^3.* Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.

[3] G. C. Hsiao and R. E. Kleinmann. Error analysis in numerical solutions of acoustic integral equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2921–2933, 1994.

[4] F. Ihlenburg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, volume 132 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[5] LMS Numerical Technologies, Leuven. *SYSNOISE User's Manual, Rev. 5.4*, 1997.

[6] S. N. Makarov and M. Ochmann. An iterative solver for the Helmholtz integral equation for high frequency scattering. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2):742–750, 1998.

[7] S. Marburg. Six elements per wavelength. Is that enough? *Journal of Computational Acoustics*, 2000. eingereicht zur Veröffentlichung.

[8] L. L. Thompson and P. M. Pinsky. Complex wavenumber Fourier analysis of the p–version finite element method. *Computational Mechanics*, 13:255–275, 1994.

[9] O. Zaleski. *Anforderungen an die Diskretisierung bei der Schallabstrahlungsberechnung.* Diploma thesis, Technische Universität Hamburg–Harburg, Arbeitsbereich Meerestechnik II – Mechanik, 8 1998.