Integraltransformationsmethoden zur Ableitung von GREENschen Funktionen

Elfgard Kühnicke (Inst. für Akustik und Sprachkommunikation, TU Dresden)

1. Einleitung

Die idealisierten Randbedingungen - schallharte und schallweiche Grenzfläche - enthalten die Vereinfachungen, daß keine Transmission von Wellen in das angrenzende Medium erfolgt, keine Grenzflächenwellen an der Grenzfläche auftreten und keine Wellenmodenwandlung stattfindet. Für diese idealisierten Randbedingungen lassen sich GREENsche Funktionen z.B. mit Hilfe der Spiegelquellenmethode /1/ oder einer FOURIER-Entwicklung /2/ ableiten. Betrachtet man die Schallabstrahlung von einer Grenzfläche zwischen zwei Festkörpern bzw. zwischen einem Festkörper und einer Flüssigkeit, so liegen keine idealisierten Randbedingungen vor. Für diese Fälle bereitet die Aufstellung von GREENschen Funktionen mit dem üblichen Formalismus Schwierigkeiten.

2. Bewegungsgleichung

Für ein linear elastisches, isotropes, homogenes Medium lautet die Bewegungsgleichung für die Verschiebung der Masseelemente aus ihrer Gleichgewichtslage:

$$\left(\lambda+\mu\right)\nabla\left(\nabla\vec{u}\right)+\mu(\nabla\nabla)\vec{u}+\rho\vec{F_V}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{u} \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{u}$ - der infinitesimale Verschiebungsvektor, $\vec{F_V}$ - die Volumenkraft, ρ - die Dichte und λ und μ - sind die Laméschen Konstanten: $c_L^2=(\lambda+2\mu)/\rho$ $c_T^2=\mu/\rho$. c_L und c_T sind die Longitudinal- bzw. Transversalwellengeschwindigkeiten.

3. Integralgleichungen und GREENsche Funktionen

Dieser Punkt ist eine Zusammenstellung der einfachsten bekannten Lösungen mit Hilfe der HUYGENSschen und der RAYLEIGHschen Integralform.

3.1 Grundgleichungen für die Wellenausbreitung in fluiden Medien

Für fluide Medien genügt ein skalares Potential ϕ zur Beschreibung des Schnellefeldes, und eine Wellengleichung läßt sich für den Druck angeben:

$$\vec{v}=-grad\,\phi \quad p=\varrho\,\partial\phi/\partial t \quad \dot{\vec{v}}=-\frac{1}{\varrho}grad\,p \qquad \partial^2 p/\partial t^2=c^2\,\nabla^2 p \tag{2a,b,c,d}$$

Unter Verwendung von GREENschen Funktionen kann mit Hilfe des GAUSSschen Satzes eine Integralform der Lösung der skalaren Wellengleichung (2d) angegeben werden. Befindet sich die Quelle in der Grenzfläche und ist das Volumen ansonsten quellfrei, so reduziert sich diese Integralform auf ein Oberflächenintegral. Bei einer harmonischen Anregung $e^{-i\omega t}$ und einem fluiden Medium ($p_\omega=-i\varrho\omega\phi$) lautet die HELMHOLTZ-HUYGENSsche-Integralform:

$$p_\omega(r)=\int\int\left[G_\omega\left(r\mid r_o\right)\frac{\partial}{\partial n_o}p_\omega(r_o)-p_\omega(r_o)\frac{\partial}{\partial n_o}G_\omega\left(r\mid r_o\right)\right]dA_o \tag{3}$$

↓ RAYLEIGHsches Integral ↓ SOMMERFELDsche Streuformel

Je nachdem, ob die Randbedingungen schallweich oder schallhart sind, verschwindet in (3) der erste oder der zweite Term.

3.2 GREENsche Funktionen für das unbegrenzte Medium (Freifeld)

Die GREENsche Funktion für das unbegrenzte Medium (Index ∞)

$$g_\omega\,(r\mid r_o)=\frac{1}{4\pi R}e^{ikR} \quad R=\left|\vec{r}-\vec{r_o}\right|=\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\right] \tag{4}$$

liefert das Feld einer periodischen kugelsymmetrischen Punktquelle. Der Quellpunkt befinde sich bei $\vec{r_o}=(x_o,y_0,z_0)$ und der Beobachtungspunkt bei $\vec{r}=(x,y,z)$. Die GREENsche Funktion für das unendliche Medium in Zylinderkoordinaten (r,θ, z) lautet /1/:

$$g_\omega\,(r\mid r_o)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i\in_m}{4\pi}\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^\infty J_m(\xi r_0)J_m(\xi r)\,e^{-\eta|z-z_0|}\frac{\xi d\xi}{\eta} \tag{5}$$

$\eta=\sqrt{k^2-\xi^2}$, J_m sind die sphärischen Besselfunktionen. Der Koeffizient $\in_m$ ist 1 für m=0 und 2 für m>0.

3.3 Abstrahlung von einer schallharten Wand

Die Quelle befinde sich in der ebenen, unendlich ausgedehnten, festen Wand *(x-y-*Ebene) bei z=0. Ist die Anregung der Quelle harmonisch $v_z=v_\omega e^{-i\omega t}$, so ergibt sich auf der Quellfläche entsprechend (2c) $\partial p/\partial n=-\partial p/\partial z=-ik\varrho v_\omega\,e^{-i\omega t}$. Außerhalb der Quelle gilt v_z=0 und damit $\partial p/\partial z=0$. In /1/ wird die GREENsche Funktion für den Halbraum mit einer starren Grenzfläche mit Hilfe der Spiegelquellenmethode abgeleitet. Befindet sich die Quelle auf der Grenzfläche, ist also z_o=0, so gilt:

$$G^H_\omega\left(r\mid x_0,y_0,0\right)=2g^\infty_\omega\left(r\mid x_0,y_0,0\right)=\frac{1}{2\pi R}\,e^{ikR} \tag{6}$$

Die GREENsche Funktion für eine kugelsymmetrische Quelle in einem Halbraum mit einer starren Grenzfläche in Zylinderkoordinaten ist:

$$G^H_\omega=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i\in_m}{4\pi}\cos m(\theta-\theta_0)\int_0^\infty J_m(\xi r_0)J_m(\xi r)\,(e^{-\eta|z-z_0|}+e^{-\eta|z+z_0|})\frac{\xi d\xi}{\eta} \tag{7}$$

Der erste Term in Gleichung (7) repräsentiert die einfallende und der zweite die reflektierte Welle. Für z_0=0 erhalten wir die GREENsche Funktion für die Quelle auf der Grenzfläche. Die Normalenableitung der GREENschen Funktion (6) bzw. (7) ist auf der Grenzfläche Null. Damit verschwindet in Gleichung (3) der zweite Term, und Gleichung (3) geht in die RAYLEIGHsche Integralform über. Betrachten wir eine kreisrunde Quellfläche im Ursprung mit dem Radius a. Auf der Quellfläche gelte: v_ω=const für $r<a$. Für den Schalldruck des sogenannten Kolbenschwingers ergibt sich:

$$p_\omega=k c\varrho\,v_\omega a\int_0^\infty\frac{1}{\eta}J_1(\xi a)J_0(\xi r)\,e^{-\eta|z|}d\xi=\frac{-ik\varrho c v_\omega}{2\pi}\int\int\frac{1}{R}\cdot e^{ikR}dA \tag{8}$$

Das erste Integral in Gleichung (8) ist in Zylinderkoordinaten, wobei die Zylinderachse senkrecht zur Grenzfläche steht. Aufgrund der Symmetrie der Quelle konnte die Integration über die Fläche ausgeführt werden. Der zweite Ausdruck resultiert aus der Verwendung der GREENschen Funktion in Exponentialform (6).

3.4 Abstrahlung von einer schallweichen Grenzfläche

Im Fall der schallweichen Wand ist der Schalldruck auf der Quellfläche vorgegeben und außerhalb der Quelle 0. Die Ableitung des Drucks und damit die Schnelle an der Grenzfläche sind unbekannt. In diesem Fall wird eine gegenphasige Spiegelquelle verwendet /3/. Die GREENsche Funktion wird so gewählt, daß sie für einen auf der Grenzfläche liegenden Quellpunkt identisch verschwindet und damit in Gleichung (3) nur der zweite Term übrigbleibt.
Für den Normalgradienten der GREENschen Funktion ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial n}G^H_\omega(r\mid x_0,y_0,0)=2ikg^\infty_\omega\cdot\cos\theta=ik\frac{1}{2\pi R}\,e^{ikR}\cdot\cos\theta \tag{9}$$

wobei θ der Winkel zwischen dem Normalenvektor auf die Wand und dem Vektor $\vec{r}-\vec{r_o}$ ist. Für eine zylindersymmetrische Quelle im Ursprung bei einem konstantem Druck p_0 über die gesamte Scheibe ergibt sich

$$p_\omega=\frac{-ikp_0}{2\pi}\int\int\frac{1}{R}e^{ikR}\cdot\cos\theta\,dA_o=-p_0\,a\int_0^\infty J_1(\xi a)\,J_0(\xi r)\,e^{\eta|z|}d\xi \tag{10}$$

3.5 Abstrahlung von einer nicht „perfekt schallharten" Grenzfläche

In /1/ wird ebenfalls für eine nicht „perfekt schallharte" Wand, die mit einer Punktimpedanz $Z(\omega)=\varrho c/\beta$ reagiert, der Schalldruck berechnet. Zur Vereinfachung des Oberflächenintegrals (3) werden $\partial G/\partial z_o=-ik\beta G$ und die akustische Admittanz β auf der gesamten Grenzfläche konstant gesetzt. Damit fallen die zwei Terme von (3) zusammen. Wegen der nicht „perfekt steifen" Wand wird in Gleichung (7) bei der reflektierten Welle der Faktor C_R eingefügt. Für den Fall einer kreisrunden Quelle im Ursprung folgt:

$$p=\frac{k\varrho c v_z a}{2}\int_0^\infty J_1(\xi a)J_0(\xi r)\,(1+C_R)\,e^{\eta z}\frac{d\xi}{\eta} \quad C_R=\frac{\eta-k\beta}{\eta+k\beta}=\frac{\varrho\eta_W-\varrho_W\eta}{\varrho\eta_W-\varrho_W\eta} \tag{11}$$

Eine exakte Darstellung der GREENschen Funktion in Exponentialform kann nicht angegeben werden. Die Näherung für den Schalldruck in kartesischen Koordinaten ergibt sich mit der genäherten GREENschen Funktion zu:

$$p\approx-\frac{ik\varrho c}{4\pi}\int\int v_z(x_0,y_0)\left(1+\frac{\cos\theta'-\beta}{\cos\theta'+\beta}\right)\frac{e^{ikR}}{R}dx_0\,dy_0 \quad \cos\theta'=z/\vec{R} \tag{12}$$

Zum Vergleich der Ergebnisse von Punkt 3 und 4 führen wir entsprechend Gleichung (2b) ein Potential für die L-Welle ($\Phi=-p/i\omega\varrho$) ein. Da $aJ_1(\xi a)/\xi$ entsprechend /7/ das Ergebnis der Integration über eine symmetrische Quellfläche mit konstanter Anregungsverteilung ist, erhalten wir aus den Schalldrücken für eine kreisrunde Quelle im Koordinatenursprung (Gleichungen (8), (10), (11), (12)) die Schnellepotentiale ϕ für eine achsensymmetrische Punktquelle im Koordinatenursprung

$$\phi=A_W\int_0^\infty S^p_W(\xi)J_0(\xi r)\,e^{\eta|z|}\xi\,d\xi\approx B_W\cdot S^p_W(\theta)\frac{1}{R}\cdot e^{ikR} \quad \eta=\sqrt{k^2-\xi^2}$$

$$A_{fest}=A_T=-v_\omega/2i \quad A_{frei}=-p_0/2i\omega\varrho \quad B_{fest}=B_T=v_\omega/4\pi \quad B_{frei}=-p_0/4\pi\varrho c$$

$$S_{fest}(\xi)=\frac{2}{\eta} \quad S_T(\xi)=\frac{1}{\eta}\left(1+C_R(\eta)\right) \quad S_{frei}(\xi)=-2 \tag{13}$$

$$S_{fest}(\theta)=2 \quad S_T(\theta)=\left(1+\frac{\varrho_1 c_{L1}\cos\theta_2-\varrho_2 c_{L2}\cos\theta_1}{\varrho_1 c_{L1}\cos\theta_2+\varrho_2 c_{L2}\cos\theta_1}\right) \quad S_{frei}(\theta)=-2\cos\theta$$

Der Index W (Wand) steht für die Grenzfläche und ist durch fest für die schallharte, frei für die schallweiche und T (Transmission) für die nicht vollkommen schallharte Grenzfläche zu ersetzen.

4. Integraltransformationsmethode „generalized ray theory"

4.1 Zeitabhängige GREENsche Funktionen

Die Integraltransformationsmethoden liefern Lösungen des Rand-Anfangswert-Problems in Form von GREENschen Funktionen und stellen eine effektive Möglichkeit zur Untersuchung der Ausbreitung zeitabhängiger Wellen dar. Die Vektorgleichung (1) wird in 3 skalare Wellengleichungen für die Potentiale zerlegt. Durch Transformationen lassen sich diese partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche überführen. Die Lösung des Rand-Anfangswert-Problems erfolgt im transformierten Gebiet. Von der Dimension sowie der Symmetrie des Problems hängt die Anzahl der notwendigen Transformationen und somit auch die Anzahl der Rücktransformationen ab. Für zweidimensionale Probleme genügen bei einer impulsförmigen Anregung zwei Transformationen und bei einer harmonischen Anregung eine Transformation.

Die Verschiebungen im transformierten Gebiet, die von einer an einer Plattenoberfläche wirkenden Einzelkraft hervorgerufen werden, haben in Zylinderkoordinaten (r,θ,z) entsprechend /4/ die Form:

$$\bar{u}_\alpha(r,z,s) = F(s)\left[F_z\,\bar{G}_{\alpha z} + F_r\,\bar{G}_{r\alpha}\right] \quad F(s) = \overline{f(s)}/(4\pi\rho s^2) \tag{14}$$

wobei α für die *z*- oder *r*-Komponente steht, *s* ist die Transformationsvariable bzgl. der Zeit, *f(s)* ist die transformierte Zeitfunktion der angreifenden Kraft, ρ die Dichte des Mediums. F_z und F_r sind die Komponenten der angreifenden Kraft. Für die GREENschen Funktionen im einfach transformierten Gebiet gilt:

$$\bar{G}_{\alpha z}(s) = s\int_0^\infty (S^P D^P_\alpha e^{-spz} + S^S D^S_\alpha e^{-sqz}) J_\alpha \xi \, d\xi \quad p = \sqrt{\xi^2 + 1/c_L^2} \;\; q = \sqrt{\xi^2 + 1/c_T^2} \tag{15}$$

ξ ist die Transformationsvariable bzgl. des Ortes. Die Indizes P bzw. L stehen für die Longitudinalwelle (P-pressure) und S und T für die Transversalwelle (S-sheare). Für $\alpha=z$ ist $J_\alpha=J_0$ und für $\alpha=r$ ist $J_\alpha=J_1$. Die Quellfunktionen für eine Normalkraft und eine Explosionskraft im Innern eines Mediums lauten:

$$S^P = -\varepsilon \quad S^S = \xi/q \qquad S^S_{Expl} = 1/p \quad S^S_{Expl} = 0 \tag{16}$$

$\varepsilon = \pm 1$ je nachdem ob sich die Welle in positiver oder negativer z-Richtung ausbreitet. Die Quellfunktionen für eine Quelle an der Grenzfläche S^P_{int} und S^S_{int}

$$S^P_{int} = S^P(1+R^{PP}) + S^S R^{SP} \qquad S^S_{int} = S^S(1+R^{SS}) + S^P R^{PS} \tag{17}$$

ergeben sich entsprechend Gleichung (17) aus den Quellfunktionen für eine Quelle im Innern (16) und den verallgemeinerten Reflexionskoeffizienten. Als Beispiel sei hier der Reflexionskoeffizient für eine LL-Welle (d.h. einlaufende Longitudinalwelle wird als Longitudinalwelle reflektiert) an einer Grenzfläche Festkörper/Festkörper gegeben

$$R^{PP} = \frac{1}{N_1+N_2}\left\{C_1\left[4q_1p_1\xi^2 + (2\xi^2 + c_{T1}^{-2})^2\right] - N_2\right\} \tag{18}$$

$$N_1 = -C_1\left[-4q_1p_1\xi^2 + (2\xi^2 + c_{T1}^{-2})^2\right] \quad N_2 = C_2\left[-4q_2p_2\xi^2 + (2\xi^2 + c_{T2}^{-2})^2\right]$$

$$C_1 = \rho_1 c_{T1}^4 p_2 \quad C_2 = \rho_2 c_{T2}^4 p$$

Der Index 1 steht hier für das Ausbreitungsmedium und 2 für das angrenzende Medium. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß der Reflexionskoeffizient die Parameter c_{L1}, c_{L2}, c_{T1}, c_{T2} ρ_1, ρ_2 von beiden aneinandergrenzenden Medien enthält und somit sowohl die Wellenmodenwandlung an der Grenzfläche als auch die Transmission in das angrenzende Medium berücksichtigt wird. Der Reflexionskoeffizient für zwei aneinandergrenzende fluide Medien ($c_{T1}=c_{T2}=0$) ist in (22) gegeben.

Entsprechend der Wahl des Reflexionskoeffizienten lassen sich unterschiedliche Randbedingungen verwirklichen. Die Reflexionskoeffizienten für eine Grenzfläche Festkörper/Festkörper liefern die Quellfunktion für eine „Kraft unter Last"/5/, d.h. die Quelle wirkt an einer Grenzfläche, die vollständig mit einem Festkörper bedeckt ist. Ist das angrenzende Medium Vakuum gilt $\rho_2 = 0$. Die Quellfunktionen für eine Normalkraft an der freien Festkörperoberfläche sind:

$$S^{P*}_{int}(\xi) = \frac{-2(2\xi^2 + c_T^{-2})}{c_T^2 N^*} \quad S^{S*}_{int}(\xi) = \frac{4p\xi}{c_T^2 N^*} \quad N^* = \left[-4\,q\,p\,\xi^2 + (2\xi^2 + 1/c_T^2)^2\right] \tag{19}$$

Die Aufnehmerfunktionen *D* hängen davon ab, ob die Verschiebung im Innern oder an einer Grenzfläche berechnet werden. Im Innern gilt:

$$D^P_z = -p \quad D^S_z = -\xi \quad D^P_r = D^P_\theta = -\xi \quad D^S_r = D^S_\theta = -q \tag{20}$$

Zum Vergleich mit den berechneten Schalldrücken für fluide Medien im Punkt 3 sei auch noch das Potential für die L-Welle für das unendliche Medium oder für Quellen an Oberfläche des Halbraums gegeben:

$$\tilde{\phi}(r,z,s) = \frac{f(s)}{4\pi\rho}\int_0^\infty S^P_{int}(\xi)\, e^{-sp|z|}\, J_o(s\xi r)\,\xi\, d\xi \tag{21}$$

Bei einer „schallharten" bzw. „schallweichen" (spannungsfreien) Grenzfläche an einem fluiden Medium wird der Reflexionskoeffizient $R^{PP} = \pm 1$. Damit ergibt sich entsprechend (16) und (17) für die in Punkt 3 diskutierten Quellen: Normalkraft an der freien Oberfläche, Explosionskraft an der schallharten Oberfläche und Explosionskraft an der nicht „perfekt schallharten" Grenzfläche

$$S^P_{Kraft,frei} = -2 \quad S^P_{Expl,fest} = 2/p \quad S^P_{Expl,W} = \frac{1}{p_1}\left(1 + R^{PP}_{fl/fl}\right) \quad R^{PP}_{fl/fl} = \frac{\varrho_1 p_2 - \varrho_2 p_1}{\varrho_1 p_2 + \varrho_2 p_1} \tag{22}$$

4.2 Harmonische GREENsche Funktionen

Hat die Zeitfunktion der Quelle die Form $e^{-i\omega t}$, so ist nur eine Transformation bzgl. einer Ortskoordinate erforderlich, um gewöhnliche Differentialgleichungen zu erhalten. Aus den Gleichungen (14), (15) ergeben sich durch Ersetzen von *s* durch $-i\omega$ sowie von ξ durch $i\xi'/\omega$ die Verschiebungen und die harmonischen GREENschen Funktionen. Bei einer harmonischen Anregung ist eine Integration bzgl. ξ (siehe auch Gleichung (21)) auszuführen. Das Rücktransformationsintegral läßt sich mit Hilfe der Sattelpunktmethode näherungsweise auswerten. Diese Näherung liefert z.B. für die Radialkomponente der Verschiebung:

$$u_R(k) \approx \frac{1}{4\pi\rho c_L^2 R}\cos\theta_L\, S^P(\theta_L, c_L)\cdot e^{-ik_L R} = \frac{1}{4\pi\rho c_L^2 R} P^P \cdot e^{-ik_L R} \tag{23}$$

R ist der Abstand zwischen Quell- und Beobachtungspunkt, θ – ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor *R* und dem Normalenvektor auf die Oberfläche im Quellpunkt, $.S(\theta)$ sind die genäherten Quellfunktionen und $P(\theta)$ - sind die Richtcharakteristiken der Punktquellen. Die genäherten Quellfunktionen lassen sich mit der Substitution $\xi = i\sin\theta/c$ direkt aus den Quellfunktionen für die transienten GREENschen Funktionen (z.B. aus (16), (19) und (22)) bestimmen.

Für eine Normalkraft an der freien Oberfläche eines Halbraums ergibt sich die folgenden Richtcharakteristik für die L-Welle

$$P^{P*} = \frac{2\,(1 - 2c^2\sin^2\theta)\cdot\cos\theta}{\left[(1-2c^2\sin^2\theta)^2 + 4c^4\sin^2\theta\,\cos\theta\,\sqrt{c^{-2} - \sin^2\theta}\,\right]} \tag{24}$$

wobei θ der Einfallwinkel der L- Welle ist; $c=c_{T2}/c_{L2}$ /5/. (Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Punktrichtwirkungen für die Normalspannung und für eine Tangentialspannung an der freien Oberfläche eines nichtschubspannungsfreien Halbraums auch in Kutzner /2/ mit Hilfe einer FOURIER-Entwicklung und anschließender FRAUNHOFERscher Näherung abgeleitet werden.) Rechnen wir das Potential (21) mit den Quellfunktionen (22) in das harmonische Potential um und führen die Näherung aus, so folgt:

$$\tilde{\phi}(r,z,\omega) = \frac{1}{4\pi\rho}\int_0^\infty S^P_{int}(\xi)\, e^{-sp|z|}\, J_o(s\xi r)\,\xi\, d\xi \approx \frac{1}{4\pi\rho} P\cdot e^{ikR} \tag{25}$$

$$P^P_{Kraft,frei} = -2\cos\theta \quad P^P_{Expl,fest} = 2 \quad P^P_{Expl,W} = \left(1 + R^{PP}_{fl/fl}\right)$$

$$R^{PP}_{fl/fl} = \frac{\varrho_1\tilde{p}_2 - \varrho_2\tilde{p}_1}{\varrho_1\tilde{p}_2 + \varrho_2\tilde{p}_1} = \frac{\varrho_1 c_{L1}\cos\theta_2 - \varrho_2 c_{L2}\cos\theta_1}{\varrho_1 c_{L1}\cos\theta_2 + \varrho_2 c_{L2}\cos\theta_1} \qquad \tilde{p} = \sqrt{\xi^2 - k_L^2} \tag{26}$$

Der Vergleich mit den Formeln (13) im Punkt 3 zeigt, daß die Punktrichtcharakteristiken, die durch die näherungsweise Auswertung des Integrals mit der Sattelpunktmethode gewonnen werden, die Quellfunktionen für die Exponentialform des RAYLEIGH- und SOMMERFELDschen Integrals liefern.

Abb.1 zeigt berechnete Richtcharakteristiken für die L-Welle in Wasser bei unterschiedlichen Randbedingungen. Die Kurvenform wird von den Wellenmodenwandlungen bestimmt. Die Extremwerte in der Richtcharakteristik für die Kraft an der Grenzfläche zwischen PZT und Wasser treten bei den Grenzwinkeln der Totalreflexion auf (weiterführende Diskussion in /5/). Zur Bestimmung der Richtcharakteristik einer vertikalen Linienkraft, die an der Grenzfläche Festkörper/Wasser wirkt, wurden von Köhler /6/ Messungen durchgeführt. Dazu bestimmte er die Richtungsabhängigkeit des Schalldrucks in Wasser von einem sehr schmalen PZT-Streifen (200 μm) der in PZT-Material eingebettet ist. Die gemessenen Kurve stimmt sehr gut mit der berechneten in Abb.1 überein.

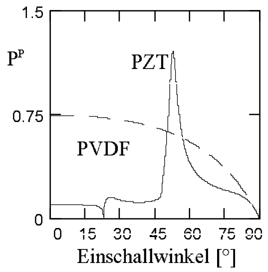

Abb.1: Punktrichtcharakteristiken in Wasser bei einer vertikalen Kraft an der Grenzfläche zu PZT, PVDF

5. Schlußfolgerungen:

- Die harmonische GREENsche Funktion ist ein Integral. Die Exponentialform ist außer bei den idealisierten Randbedingungen „schallhart" und „schallweich" eine Näherung.
- Integraltransformationsmethoden liefern bei den gleichen Randbedingungen die RAYLEIGH- bzw. die SOMMERFELDsche Integralform in Zylinderkoordinaten bzw. auch in Exponentialform.
- Dadurch können die mit Hilfe von Integraltransformationsmethoden berechneten Quellfunktionen in das SOMMERFELDsche bzw. RAYLEIGH-Integral eingesetzt werden. Dieses ist sehr vorteilhaft, da es zur numerischen Auswertung dieser Integralformen bei nichtsymmetrischen Quellen schon weit entwickelte Algorithmen gibt.
- Mit Hilfe von Integraltransformationsmethoden lassen sich auch bei komplizierten Randbedingungen die GREENschen Funktionen einfach berechnen.
- Die gezeigten Richtcharakteristiken machen deutlich, daß selbst für ein fluides Medium mit angrenzendem Festkörper der Kolbenschwinger in der „schallharten Grenzfläche" (Richtcharakteristik $S(\theta) = 1$) kein gutes Modell darstellt. Der Einfluß der Richtcharakteristik der Punktquelle auf das Schallfeld des ausgedehnten Schwingers wird von der Schwingergröße im Verhältnis zur Wellenlänge bestimmt /5/.
- Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß Integraltransformationsmethoden außer für die hier beschriebenen Quellen: Normalkraft und Explosionsquelle, auch Felder für beliebig orientierte Kräfte und Dipole liefern.

6. Literatur

/1/ P.M.Morse, K.U.Ingard: Theoretical Acoustics, New York 1968, Kapitel 7

/2/ J. Kutzner: Grundlagen der Ultraschallphysik, B.G. Teubner Stuttgart 1983

/3/ B.Delannoy, H.Lasota, C.Bruneel, R.Torguet, E.Briddoux: The infinite planar baffles problem in acoustic radiation and its experimental verification, J. Appl. Phys. **50** (8), (1979), 5189-5195

/4/ Y.-H.Pao, R.R.Gajewski: "The generalized ray theory and transient response of layered elastic solids", in Physical Acoustics, edited by W.P.Mason, G.H.Thurston, (Academic New York, 1977), vol. 13, chap. 6, pp.183-265

/5/ E.Kühnicke: Directional field of a point source for calculation of three-dimensional harmonic waves in layered media, in Acoustical Imaging vol.22, ed. by P.Tortoli, ISBN 0-306-45364-9, Plenum Press New York 1996, pp. 9-14

/6/ B.Köhler: Impulse response of a piezoelectric layer, Acoustica, 73, (1991), 144

/7/ L.F. Bresse, D.A. Hutchins: "Transient generation of elastic waves by a disk-shaped normal force source", J.Acoust.Soc.Am., 86(2), 810-817, (1989)