

Vergleich eindimensionaler Rohrmodelle und mehrdimensionaler Wellenleiter-Gitter zur Schallfeldsimulation

Hans Werner Strube
Drittes Physikalisches Institut, Universität Göttingen

EINLEITUNG

Üblicherweise werden Schallfelder durch Schalldruck p und Schallschnelle v (bzw. Schallfluss q im Eindimensionalen) beschrieben. Numerisch effizienter ist jedoch oft die Verwendung von Wellengrößen, d. h. Linearkombinationen $p \pm Rv$ mit einer geeigneten (reellen, nicht frequenzabhängigen) Impedanz R . Diese erfordern nur lokale Operationen ohne Lösung von Gleichungssystemen. Im Eindimensionalen sind (z. B. zur Simulation des Vokaltrakts nach Kelly-Lochbaum (KL) [5]) stückweis homogene Rohrmodelle verbreitet. Im Mehrdimensionalen gibt es Leitungsgitter-Methoden, „Digital Waveguide Mesh“ (DWM) [4] oder „Transmission Line Matrix“ (TLM) [3], die sich als Spezialfälle der mehrdimensionalen Wellendigitalfilter (MDWDF) [1, 2] auffassen lassen.

Die m. W. ad hoc eingeführte KL-Struktur, die auch eng mit den Rohrmodellen der linear-prädiktiven Sprachcodierung verwandt ist und in [6] auf den zeitvarianten Fall verallgemeinert wurde, soll hier aus einfachen Diskretisierungsparadigmen begründet werden, ohne a priori eine in Raum und Zeit stückweis konstante Querschnittsfunktion anzunehmen. Außerdem wird gezeigt, dass dieser Ansatz kein eindimensionaler Spezialfall der mehrdimensionalen Wellenleitergitter ist, sondern sich davon grundlegend hinsichtlich der Bedeutung der Wellengrößen und der Lage von Streuknoten und raumzeitlichen Abtastpunkten unterscheidet. Eine Verbindung beider Ansätze wird dennoch versucht.

LINEARE AKUSTIK

Wir betrachten nur den dämpfungsfreien Fall. Im Eindimensionalen nehmen wir annähernd ebene Wellen in einem hartwandigen Rohr mit räumlich und evtl. zeitlich veränderlichem Querschnitt A an. Dann gilt mit Schalldruck p und Schallfluss $q = vA$:

$$\begin{aligned} -\partial_x p &= \partial_t(L'q) = c^{-1}\partial_t(qZ), & (1) \\ -\partial_x q &= \partial_t(C'p) = c^{-1}\partial_t(p/Z), & (2) \end{aligned}$$

$$L' = \frac{\rho_0}{A}, \quad C' = \frac{A}{\rho_0 c^2}, \quad Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\rho_0 c}{A}. \quad (3)$$

Hier ist ρ_0 die mittlere Dichte, c die Schallgeschwindigkeit. Die Gleichungen sind denen einer elektrischen Leitung analog, wenn p = Spannung, q = Strom. L' , C' sind Induktivitäts- bzw. Kapazitäts-Dichten, Z die akustische Impedanz.

Im Zweidimensionalen entspricht dem ein Flachraum zwischen zwei harten Platten, wobei A der orts- und evtl. zeitabhängige Abstand ist und $\mathbf{q} = vA$ eine (jetzt vektorielle) Schallflussdichte. $\partial_x p$ ist durch ∇p und $\partial_x q$ durch $\nabla \cdot \mathbf{q}$ zu ersetzen. Im Dreidimensionalen gibt es nichts, was A entspricht; mit $A \equiv 1$ wird $\mathbf{q} = v$. Analog sind im Ein- und Zweidimensionalen auch Saiten bzw. Membranen zu behandeln, wo p der transversalen Schnelle entspricht.

Im Eindimensionalen können wir alternativ unidirektionale Wellen $p^\pm = (p \pm Zq)/2$ bilden und auch kombinierte Raum-Zeit-Koordinaten parallel zu den Wellentrajektorien. Ableitungen in diesen Richtungen sind $\partial_\pm = c^{-1}\partial_t \pm \partial_x$. Aus (1), (2) wird dann

$$\begin{aligned} \partial_+ p^+ - \partial_- p^- &= 0, & (4) \\ \partial_+(p^+/Z) + \partial_-(p^-/Z) &= 0. & (5) \end{aligned}$$

Aus einer Lösung hiervon können die ursprünglichen Feldgrößen rekonstruiert werden:

$$p = p^+ + p^-, \quad q = (p^+ - p^-)/Z. \quad (6)$$

DISKRETISIERUNG UND KL-MODELL

Eine bekannte Methode, Ableitungen zu diskretisieren, ist (in der Terminologie der digitalen Signalverarbeitung) die „bilinare z-Transformation“, wobei die Ableitung \dot{u} einer Funktion u diskret als $\dot{u}_k + \dot{u}_{k-1} = 2f_s(u_k - u_{k-1})$ implizit definiert wird (f_s = Abtastfrequenz). Dies entspricht der Trapezregel der numerischen Integration. Wir zeigen, dass das KL-Rohrmodell – auch im zeitvarianten Fall – äquivalent ist zu

- bilinearer Transformation von Raum- und Zeitableitungen von p und q in (1), (2);
- zueinander zentrierten einfachen Differenzen von p^+ , p^- in (4), (5) entlang den Diagonalen der Abtastgitterzellen;

wobei p, q, Z bzw. p^+, p^-, Z alle an denselben Punkten eines rechteckigen Gitters abgetastet sind und $f_s = c/D$ (D = räumliches Abtastintervall).

Beweis. Seien T ein Zeitverschiebungsoperator um $1/f_s$ und X ein Ortsverschiebungsoperator um D . Bilineare Transformation von (1), (2) in Raum und Zeit ergibt

$$\begin{aligned} (v/c)(1+X)(1-T)(qZ) + (1+T)(1-X)p &= 0, & (7) \\ (v/c)(1+X)(1-T)(p/Z) + (1+T)(1-X)q &= 0, & (8) \end{aligned}$$

wo $v = f_s D$ das Verhältnis der zeitlichen und räumlichen Abtastfrequenzen ist. Mit $v = c$ und mit einseitig fortschreitenden Wellen $p^\pm = (p \pm Zq)/2$ werden (7), (8) zu

$$\begin{aligned} (1-XT)p^+ - (X-T)p^- &= 0, & (9) \\ (1-XT)(p^+/Z) + (X-T)(p^-/Z) &= 0. & (10) \end{aligned}$$

Dies erhält man auch direkt aus (4), (5) durch zueinander zentrierte einfache Differenzen entlang den Wellentrajektorien.

Mit Indizes n für die Orts- und k für die Zeit-Abtastwerte lautet dies explizit:

$$p_{n,k}^+ - p_{n-1,k-1}^+ - p_{n-1,k}^- + p_{n,k-1}^- = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_{n,k}^+ Z_{n,k}^{-1} - p_{n-1,k-1}^+ Z_{n-1,k-1}^{-1} \\ + p_{n-1,k}^- Z_{n-1,k}^{-1} - p_{n,k-1}^- Z_{n,k-1}^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Diese sind formal identisch mit den Streugleichungen für kurze Pulse an einer raumzeitlichen Unstetigkeit, d. h. dem Schnitt einer Grenze zweier homogener Leitungssegmente und dem Zeitpunkt einer stufenförmigen Z -Änderung, wie sie in [6] völlig anders unter der Annahme einer a priori gegebenen räumlichen Segmentierung und stufenweisen Zeitänderung hergeleitet wurden. Die Abtastpunkte entsprechen den Mittelpunkten eines Rechtecks mit konstantem Z . Im zeitinvarianten Fall erhält man die gewöhnlichen KL-Streugleichungen.

Im ursprünglichen KL-Modell ist f_s halbiert ($c/2D$), da sonst zwei Trajektorienscharen existieren, die höchstens durch Randbedingungen wechselwirken. Nur bei $f_s = c/D$ können aber p und q in der Segmentmitte rekonstruiert werden. Betrachtet man (p, q) dagegen an den Segmentgrenzen, haben diese und Z verschachtelte Abtastpunkte, was nicht zu obiger Herleitung führt.

TLM/DWM-LEITUNGSGITTER

Bei raumzeitlich konstantem Z lässt sich die (auch mehrdimensionale) Schallausbreitung durch Druckpulse approximieren, die sich mit Abtastrate f_s auf einem regulären (z. B. rechteckigen oder hexagonalen) Gitter homogener Leitungsstücke gleicher Länge D ausbreiten, welche an den räumlichen Abtastpunkten der Feldgrößen parallel verbunden sind, also in der Terminologie der

Wellendigitalfilter (WDF) [1] durch einen symmetrischen n -Tor-Paralleladaptor. Im Eindimensionalen entartet das Ganze zu einer einzigen homogenen Leitung, da ein symmetrischer 2-Tor-Paralleladaptor leer ist. Die Pulsgeschwindigkeit auf den Leitungen ist $v = Df_s = c\sqrt{d}$ in d Raumdimensionen; die Phasengeschwindigkeit der simulierten Wellen zeigt richtungsabhängige Dispersion und wird für Frequenz gegen Null $= c$.

Im inhomogenen Fall (Z nicht konstant) könnte man die charakteristischen Impedanzen der Leitungen verändern, was dem KL-Modell mit verschachtelten Abtastpunkten für (p, q) und Z entspräche. In [4] wird das kurz angedacht, aber nicht weiter verfolgt. Überhaupt wird im DWM-Kontext der inhomogene Fall kaum behandelt, abgesehen von Randbedingungen und externen Lastimpedanzen. Im TLM-Kontext werden für p, q, Z gemeinsame Abtastpunkte beibehalten und in den Knoten induktive und/oder kapazitive Lastglieder angebracht, i. Allg. als Stichleitungen der Länge $v/2f_s$ aufgefasst [3]. (Bei WDF-Darstellung der Zeitableitungen sind diskrete L und C nicht von Stichleitungen unterscheidbar.) Auf diese Weise ist nicht nur variables Z , sondern auch variables c darstellbar. Wie das KL-Modell scheint auch dieser Ansatz zunächst nicht formal aus einem Diskretisierungsparadigma abgeleitet worden zu sein, lässt sich aber als MDWDF begründen (vgl. [2] für $L' = \text{const}$). Wir skizzieren dies im Folgenden nur für den eindimensionalen Fall.

Definiere konstante $L_0 \leq L'_{\min}$, $C_0 \leq C'_{\min}$ und spalte auf: $L' = L_0 + \Lambda$, $C' = C_0 + \Gamma$, $\Lambda, \Gamma \geq 0$. Die Feldgleichungen (1), (2) werden dann

$$\partial_t(\Lambda q) + \partial_t L_0 + \partial_x p = 0, \quad (13)$$

$$\partial_t(\Gamma p) + \partial_t C_0 + \partial_x q = 0. \quad (14)$$

Mit den Definitionen $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, $R = \sqrt{L_0/C_0}$ und Wellen $p^\pm = (p \pm Rq)/2$ können die letzten beiden Terme in diesen Gleichungen jeweils auf auf kombinierte Koordinaten mit $\partial_\pm = v^{-1}\partial_t \pm \partial_x$ transformiert werden, vgl. (4), (5):

$$\partial_t(\Lambda q) + \partial_+ p^+ - \partial_- p^- = 0, \quad (15)$$

$$R\partial_t(\Gamma p) + \partial_+ p^+ + \partial_- p^- = 0. \quad (16)$$

Gemäß dem MDWDF-Schema [1] führen wir formale Wellengrößen Q, P, P^+, P^- (hier alle mit Dimension [Druck]) ein:

$$(\Lambda q)_{n,k} = (Q_{n,k} + Q_{n,k-1})/2v, \quad (17)$$

$$(\partial_t(\Lambda q))_{n,k} = (Q_{n,k} - Q_{n,k-1})/D, \quad (18)$$

$$R(\Gamma p)_{n,k} = (P_{n,k} + P_{n,k-1})/2v, \quad (19)$$

$$R(\partial_t(\Gamma p))_{n,k} = (P_{n,k} - P_{n,k-1})/D, \quad (20)$$

$$p_{n,k}^+ = (P_{n,k}^+ + P_{n-1,k-1}^+)/2, \quad (21)$$

$$(\partial_+ p^+)_{n,k} = (P_{n,k}^+ - P_{n-1,k-1}^+)/D, \quad (22)$$

$$p_{n,k}^- = (P_{n,k}^- + P_{n+1,k-1}^-)/2, \quad (23)$$

$$(\partial_- p^-)_{n,k} = (P_{n,k}^- - P_{n+1,k-1}^-)/D. \quad (24)$$

Für die vier formalen Wellengrößen erhält man vier Streugleichungen, die sich so interpretieren lassen, als ob P^\pm die hin- und rücklaufenden Pulse auf homogenen Leitungstücken der Länge $D = v/f_s$ und Q, P die WDF-Wellengrößen von Induktivitäten bzw. Kapazitäten (oder äquivalent, Pulswellen auf kurzgeschlossenen bzw. offenen Stichleitungen der Länge $v/2f_s$) an den Knoten sind. Die genaue Anordnung ist:

für $\Lambda = 0$, Parallelkapazitäten ΓD ;

für $\Gamma = 0$, Serieninduktivitäten ΛD ;

allgemein, LC-Kreuzglieder oder Jaumann-Schaltungen, Fig. 1.

Für $\Lambda \equiv 0$ ist $Q \equiv 0$, für $\Gamma \equiv 0$ ist $P \equiv 0$.

Im Unterschied zum KL-Modell geschieht die Streuung nicht *zwischen*, sondern *an* den Abtastpunkten von $p, q, p^+, p^-, \Lambda, \Gamma$, und die Wellen p^\pm entsprechen nicht den MDWDF-Wellengrößen P^\pm , sondern sind nach (21), (23) die Mittelwerte von deren ein- und ausfallenden Werten, interpolieren also zwischen ihnen. Auch hier könnte man wieder die Abtastfrequenz halbieren, und selbst

dann sind p, q rekonstruierbar. Außerdem hat man größere Flexibilität, da c nicht konstant zu sein braucht. Dem stehen aber auch Nachteile gegenüber. Wenn die Variation von L' und C' groß ist, muss für gegebene Segmentlänge D die Abtastfrequenz hoch sein, d. h. $v \gg c$, selbst wenn c konstant ist. Außerdem erzeugen die Lastglieder zusätzlich Dispersion.



Fig. 1: Zwei Streuknoten mit Lastgliedern in Jaumann-Form; links mit diskreten Bauelementen, rechts mit Stichleitungen (perspektivisch). Gefüllte Balken: ideale Spartransformatoren.

MÖGLICHE KOMBINATION

Es wäre angenehm, wenn sich beide Ansätze kombinieren ließen, etwa, indem nur c -Variationen durch Lastglieder dargestellt werden, während Z -Variationen direkt unterschiedlichen Segmentimpedanzen R entsprechen. Dann bräuchte v nur $\geq c_{\max}$ zu sein, $\Lambda = (c^{-1} - v^{-1})Z$, $\Gamma = (c^{-1} - v^{-1})/Z$. Leider ist das wegen der Unterschiede in der Lage der Streustellen und in der Bedeutung der Wellengrößen nicht ohne weiteres möglich. Auch führt variables $R = Z$ nicht zu etwas wie (15)–(24), während es andererseits zu (7), (8) mit $v \neq c$ keine lokale explizite Lösung gibt. Wenn man für Feldgrößen und Z die gleichen Abtastpunkte fordert, erscheint als einziger Ausweg, alternierend Streuung aufgrund von Lastgliedern (an den Abtastpunkten) und aufgrund von Z -Änderungen (zwischen den Abtastpunkten) anzusetzen. Dies ist intuitiv, aber nicht aus einem einheitlichen Diskretisierungsparadigma hergeleitet und in seiner Konsistenz noch nicht bewiesen.

Für konstantes c käme das KL-Modell ohne Lastglieder heraus, während im Mehrdimensionalen dann an den Abtastpunkten symmetrische Streuknoten wie im homogenen Leitungsgitter lägen. Allgemein würde im Eindimensionalen die WDF-Darstellung des Lastgliedes (Fig. 1) wegen $\sqrt{\Lambda/\Gamma} = Z$ sogar in zwei Allpässe erster Ordnung zerfallen, je einen für die hin- und rücklaufende Welle. Dies bietet eine einfache Möglichkeit, entweder die lokale Schallgeschwindigkeit oder – anders interpretiert – die Segmentlänge D zu variieren.

Literatur

- [1] A. Fettweis: Wave digital filters: theory and practice. *Proc. IEEE* **74**, 270–327 (1986)
- [2] M. Fries, A. Schrick: MDWDF-Verfahren und TLM-Methode zur Integration der 2D Maxwell-Gleichungen. *ITG-Diskussionssitzung „Neue Anwendungen theoretischer Konzepte in der Elektrotechnik“*, Berlin, 137–144 (1995)
- [3] W.J.R. Hofer: The transmission-line matrix method – theory and applications. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* **MTT-33**, 882–893 (1985)
- [4] S. van Duyn, J.O. Smith: Physical modeling with the 2-D digital waveguide mesh. *Proc. 1993 Int. Computer Music Conf.*, San Francisco, 40–47 (1993)
- [5] J.L. Kelly, C.C. Lochbaum: Speech synthesis. *Proc. Forth Int. Congr. Acoust.*, Paper G42, 1–4 (1962), nachgedruckt in: J.L. Flanagan, L.R. Rabiner (Eds.), *Speech Synthesis*, 127–130 (Dowden/Wiley 1973)
- [6] H.W. Strube: Time-varying wave digital filters for modeling analog systems. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing* **ASSP-30**, 864–868 (1982)