

Verallgemeinerte Netzwerke: Erweiterung der elektromechanischen Analogie zur Behandlung dreidimensionaler Schwingungen

Herbert Hudde

Institut für Kommunikationsakustik, Ruhr-Universität Bochum, D44780 Bochum
Tel. 0234 322 3479, hudde@ika.ruhr-uni-bochum.de

Einleitung

Die elektromechanische Analogie liefert die Möglichkeit, einfache schwingungsfähige Systeme, die nur konzentrierte Elemente enthalten, mit Netzwerken zu beschreiben, die dieselbe Struktur wie elektrische Netzwerke haben. Damit wird insbesondere elektrotechnisch vorgebildeten Anwendern ein Hilfsmittel an die Hand gegeben, das Berechnungen mit gut systematisierten Methoden ermöglicht. Die Analogie unterliegt jedoch einer wesentlichen Einschränkung: An jedem im Netzwerk durch ein Tor beschriebenen Punkt des mechanischen Systems hat die Schwingung nur einen einzigen Freiheitsgrad. Sie ist also entweder rein translatorisch oder rein rotatorisch. Es können zwar translatorische und rotatorische Schwingungen in einem einzigen Netzwerk gemeinsam auftreten (mit geeigneten Übergangselementen), an jedem einzelnen Punkt muss die Bewegung aber "rein" sein. In den im Folgenden vorgestellten "verallgemeinerten Netzwerken" wird diese Einschränkung überwunden.

Definitionen

Bei der Behandlung mechanischer Systeme wird meist eine vereinheitlichte Darstellung verwendet, die Zustandsgrößen U des Systems über eine quadratische Systemmatrix M mit äußeren Anregungen F in Beziehung setzt:

$$M \cdot U = F$$

Als Zustandsgrößen werden vorzugsweise Auslenkungen verwendet. Der Vektor U enthält alle berücksichtigten Komponenten der Auslenkungen an allen betrachteten Punkten des Systems. Da ein einzelner Punkt maximal sechs Freiheitsgrade besitzt (drei translatorische und drei rotatorische Komponenten), hat der Vektor maximal die Länge $6N$, wenn N Punkte betrachtet werden. Durch Einschränkungen der Anzahl der Freiheitsgrade wird die Länge zwar meist reduziert, jedoch werden die Systemmatrizen oft sehr groß, insbesondere bei diskretisierten Systemen, etwa bei Formulierungen mit finiten Elementen. Dies führt zu einem hohem Bedarf an Arbeitsspeicher und zu unangenehm langen Rechenzeiten. Wenn Frequenzgänge mit einer üblichen Anzahl von Linien (etwa 100) berechnet werden sollen, sind oft Rechenzeiten von vielen Stunden oder gar Tagen in Kauf zu nehmen.

Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise gehen wir zur Bildung von verallgemeinerten Netzwerken von verallgemeinerten Zweitoren aus, die verschiedene Punkte in einem mechanischen System verbinden. Die Zweitore beschreiben die mechanische Kopplung zwischen den beteiligten Punkten. Ein Punkt A wird durch seine verallgemeinerte Schnelle

$$S_A = \begin{pmatrix} v_A \\ \Omega_A \end{pmatrix} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3)^T,$$

bestehend aus den translatorischen Schnellekomponenten v_1, v_2, v_3 und den rotatorischen Schnellekomponenten $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ und durch die an diesem Punkt übertragene (innere) verallgemeinerte Kraft

$$T_A = \begin{pmatrix} F_A \\ M_A \end{pmatrix} = (F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3)^T,$$

bestehend aus den Kraftkomponenten F_1, F_2, F_3 und den Komponenten des Moments M_1, M_2, M_3 , gekennzeichnet. Ein Tor entspricht also einem Punkt im System. Es ließe sich aufteilen

in sechs "Untertore" für die sechs Komponenten. Ein Zweitor wird durch eine 12×12 -Transfer-Matrix K mit den 6×6 -Untermatrizen P, Q, Z, Y beschrieben:

$$\begin{pmatrix} T_A \\ S_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Z \\ Y & Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_B \\ S_B \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} T_B \\ S_B \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Untermatrizen P und Q sind dimensionslos, Z ist eine Impedanz-, Y eine Admittanzmatrix. Betrachtet man nur einen einzigen Punkt A , so wird dadurch ein Eintor definiert, das man durch seine 6×6 -Impedanz Z_A bzw. Admittanz Y_A kennzeichnet.

$$T_A = Z_A \cdot S_A, \quad S_A = Y_A \cdot T_A.$$

Einfaches Beispiel: Starrer Körper

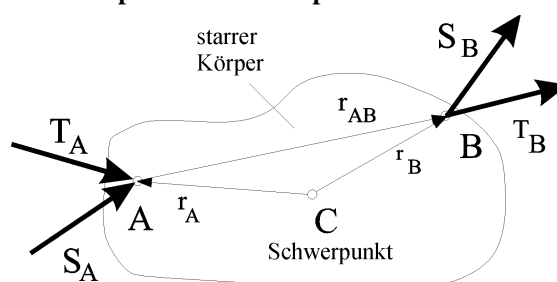


Fig. 1: Starrer Körper der Masse m als Zweitor zwischen den Punkten A und B , die durch ihre Ortsvektoren r_A und r_B bezogen auf den Schwerpunkt C definiert sind.

Die in Fig. 1 dargestellte Situation beschreibt einen starren Körper so, dass die Beziehung zwischen verallgemeinerten Kräften und Schnellen an zwei Punkten hergestellt werden. Die mechanischen Grundgleichungen sind:

$$F_A - F_B = j\omega m \cdot v_C \quad (\text{Newton}),$$

wobei v_C die translatorische Schnelle des Schwerpunkts ist. Ferner gilt die Euler-Gleichung

$$M_A + R_A F_A - M_B - R_B F_B = j\omega I \cdot \Omega,$$

mit der Trägheitsmoment-Matrix I . Die schiefsymmetrische Matrix $R_{AB} = R_B - R_A$ mit

$$R_X = \begin{pmatrix} 0 & -r_{X3} & r_{X2} \\ r_{X3} & 0 & -r_{X1} \\ -r_{X2} & r_{X1} & 0 \end{pmatrix}, \quad X=A,B$$

leitet sich aus dem Vektorprodukt $r \times F$ für die Momente ab. Ferner sind auf einem starren Körper die rotatorischen Schnellen überall gleich:

$$\Omega = \Omega_A = \Omega_B = \Omega_C,$$

und es gilt die Beziehung

$$v_A = v_B + (R_B - R_A) \cdot \Omega.$$

Durch Zusammenfassung erhält man

$$\begin{pmatrix} T_A \\ S_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A \\ M_A \\ v_A \\ \Omega_A \end{pmatrix} = K_{AB} \cdot \begin{pmatrix} T_B \\ S_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{AB} & Z_{AB} \\ Y_{AB} & Q_{AB} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_B \\ M_B \\ v_B \\ \Omega_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O & j\omega m E & j\omega m R_B \\ R_{AB} & E & -j\omega m R_A & j\omega(I - m R_A R_B) \\ O & O & E & R_{AB} \\ O & O & O & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_B \\ M_B \\ v_B \\ \Omega_B \end{pmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix E und der Nullmatrix O .

Reziprozität von Zweitoren

Die Reziprozitätsforderung lässt sich mit Hilfe von zwei durch ' bzw. " gekennzeichnete Zustände ein und desselben Systems formulieren:

$$T_A'^T \cdot S_A'' - T_B'^T \cdot S_B'' = T_A''^T \cdot S_A' - T_B''^T \cdot S_B'$$

Daraus lassen sich drei Teilbedingungen

$$P^T Q - (Z^T Y)^T = P^T Q - Y^T Z = E$$

$$P^T Y = (P^T Y)^T = Y^T P$$

$$Z^T Q = (Z^T Q)^T = Q^T Z$$

ableiten. Die erste Bedingung erinnert an die für skalare reziproke Zweitore bekannte Bedingung, dass die Determinante der Kettenmatrix gleich eins sein muss. Es sind aber offenbar zusätzliche Bedingungen zu erfüllen, die bestimmte Symmetrien fordern. Aus den genannten Symmetriebedingungen kann man noch weitere ableiten.

Zusammenschaltung von Zweitoren zu Zweitoren

Durch Zusammenschaltung von Zweitoren zu Zweitoren lassen sich neue Zweitore bilden. Sinnvolle Verschaltungen dieser Art sind nur die Hintereinander- und die Parallelschaltung. Bei der Hintereinanderschaltung bildet der Ausgang des ersten Zweitores K_{AB} den Eingang des zweiten (K_{CD}). Dies bewirkt eine Multiplikation der Transfermatrizen ($K_{AD}=K_{AB} K_{CD}$). Bei der Parallelschaltung werden jeweils die Eingänge und die Ausgänge der beiden beteiligten Zweitore K_{AB} und K_{CD} verbunden. Das resultierende Zweitor mit der Transfermatrix K_{EF} hat dann die Untermatrizen

$$Y_{EF} = (Y_{AB}^{-1} + Y_{CD}^{-1})^{-1}$$

$$Z_{EF} = Z_{AB} + Z_{CD} + (P_{AB} - P_{CD}) \cdot (Y_{AB} + Y_{CD})^{-1} \cdot (Q_{CD} - Q_{AB})$$

$$P_{EF} = (P_{AB} Y_{AB}^{-1} + P_{CD} Y_{CD}^{-1}) \cdot Y_{EF}$$

$$Q_{EF} = Y_{EF} \cdot (Y_{AB}^{-1} Q_{AB} + Y_{CD}^{-1} Q_{CD})$$

Es lassen sich viele Gesetzmäßigkeiten, auch für Schaltungen mit mechanischen Quellen, finden, die den bekannten elektrotechnischen Beziehungen entsprechen (z. B. Fig. 2,3).

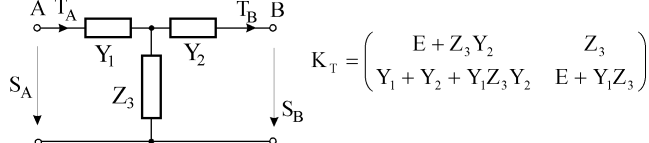


Fig. 2: Transfermatrix einer T-Schaltung aus verallgemeinerten Impedanzen und Admittanzen.

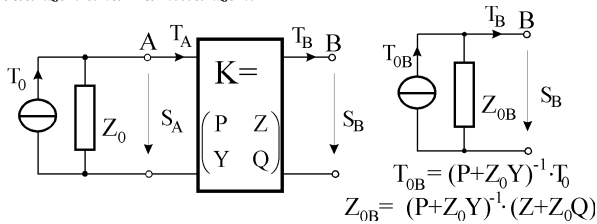


Fig. 3: Transformation einer Kraftquelle über ein Zweitor. Rechts die Ersatzschaltung für die linke Schaltung.

Die Darstellung in den beiden Figuren 2 und 3 entspricht der elektromechanischen Analogie 2. Art, die zwar "schaltungstreu", aber "impedanzdual" ist. So bedeutet etwa eine starre Verbindung zwischen den Punkten A und B in Fig. 2 nicht ein Verschwinden der Impedanzen, sondern der Admittanzen ($Y_1=Y_2=0$). Die Kettenmatrix hat dann die Untermatrizen $P_T=Q_T=E$, $Z_T=Z_3$, $Y_T=0$. Aus den oben genannten Symmetriebedingungen folgt daraus das bekannte Ergebnis, dass eine Punktimpedanz Z_3 symmetrisch ist. Hingegen ist die Untermatrix Z einer Transfermatrix keineswegs immer symmetrisch.

Eine nützliche Beziehung ist ferner die Transfermatrix bei Rückwärtsbetrieb eines Zweitores, d. h. bei Vertauschung von Ein- und Ausgang und Umkehr der Krafrichtungen:

$$K_{rev} = \begin{pmatrix} Q^T & Z^T \\ Y^T & P^T \end{pmatrix}$$

Stern-Dreieck-Umwandlung

Selbstverständlich können mechanische Zweitore auch so miteinander verschaltet werden, dass daraus nicht wieder ein Zweitor, sondern ein Mehrtor entsteht. Aus der Theorie der elektrischen Netzwerke ist bekannt, dass man in ähnlichen Fällen oft durch Dreieck-Stern-Umwandlungen Vereinfachungen des Netzwerks erzielen kann. Die Regeln für die Umwandlung gestalten sich für verallgemeinerte Zweitore allerdings komplizierter. Man benötigt zunächst eine Darstellung über Systemadmittanz-Matrizen

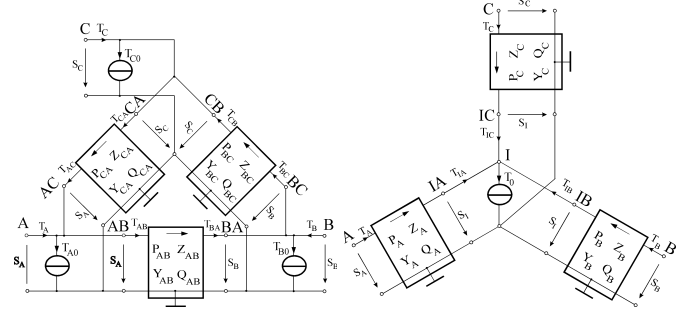


Fig. 4: Dreieck- und Stern-Schaltung aus verallgemeinerten Zweitoren mit Quellen. In beiden Fällen sind die Untermatrizen angegeben.

Man findet für die Dreieckschaltung

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{AB} Y_{AB}^{-1} + Y_{CA}^{-1} Q_{CA} & -(Y_{AB}^{-1})^{-1} & -Y_{CA}^{-1} \\ -Y_{AB}^{-1} & P_{BC} Y_{BC}^{-1} + Y_{AB}^{-1} Q_{AB} & -(Y_{BC}^{-1})^{-1} \\ -(Y_{CA}^{-1})^{-1} & -Y_{BC}^{-1} & P_{CA} Y_{CA}^{-1} + Y_{BC}^{-1} Q_{BC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A \\ S_B \\ S_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{A0} \\ T_{B0} \\ T_{C0} \end{pmatrix}$$

und für die Sternschaltung

$$\begin{pmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [P_A - (\hat{Z}_{II} Y_A^T)^{-1}] \cdot Y_A^{-1} & -(Y_B \hat{Z}_{II} Y_A^T)^{-1} & -(Y_C \hat{Z}_{II} Y_A^T)^{-1} \\ -(Y_A \hat{Z}_{II} Y_B^T)^{-1} & [P_B - (\hat{Z}_{II} Y_B^T)^{-1}] \cdot Y_B^{-1} & -(Y_C \hat{Z}_{II} Y_B^T)^{-1} \\ -(Y_A \hat{Z}_{II} Y_C^T)^{-1} & -(Y_B \hat{Z}_{II} Y_C^T)^{-1} & [P_C - (\hat{Z}_{II} Y_C^T)^{-1}] \cdot Y_C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A \\ S_B \\ S_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{Z}_{II} Y_A^T \\ \hat{Z}_{II} Y_B^T \\ \hat{Z}_{II} Y_C^T \end{pmatrix}^{-1} T_0$$

mit $\hat{Z}_{II} = Y_A^{-1} Q_A + Y_B^{-1} Q_B + Y_C^{-1} Q_C$.

Die Quellenumrechnungen zwischen beiden Verschaltungsarten ergeben sich direkt durch Vergleich der Quellterme in den beiden Gleichungen. Ebenso sind bei einer Stern-Dreieck-Umwandlung die Untermatrizen Y_{AB} , Y_{BC} und Y_{CA} durch Vergleich der Nebendiagonal-Untermatrizen unmittelbar zu bestimmen. Die Hauptdiagonal-Untermatrizen liefern drei weitere Bedingungen für die sechs unbekannt Matrizen P_{AB} , P_{BC} , P_{CA} , Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CA} . Drei weitere Bedingungen ergeben sich aus der Reziprozität. Da mehr Bedingungen nicht existieren, kann man drei Untermatrizen frei wählen. Dies zeigt, dass eine Dreieckschaltung allgemeinere Eigenschaften besitzt als eine Sternschaltung, bei der die Tore alle ausschließlich über ein Zentraltor verbunden sind.

Umgekehrt lässt sich daher eine Dreieckschaltung im Allgemeinen nicht in eine Sternschaltung verwandeln, es sei denn, die Symmetrie-Bedingung

$$\hat{Z}_{II} = -(Y_B^T \tilde{Z}_{AB}^T Y_A)^{-1} = -(Y_C^T \tilde{Z}_{BC}^T Y_B)^{-1} = -(Y_A^T \tilde{Z}_{CA}^T Y_C)^{-1}$$

ist erfüllt. Nur die Stern-Dreieck-Umwandlung lässt sich also immer durchführen. Dies hat die Konsequenz, dass allgemeine Verschaltungen von Zweitoren sich zwar häufig, aber nicht immer in vereinfachte Netzwerke auflösen lassen. Verallgemeinerte Netzwerke bilden somit eine sehr effektive Möglichkeit zur Schwingungsanalyse bei Vielkörpersystemen, die vorwiegend Kaskaden- und Abzweigstrukturen enthalten. Sie eignen sich nicht zur Behandlung großräumig vernetzter Kontinua. Aufgrund der geringen Matrixgröße, verglichen mit Systemmatrizen bei finiten Elementen, lassen sich auch große Netzwerke in sehr kurzer Zeit rechnen.

Rubin, S. (1964). "Transmission matrices for vibrations and their relation to admittance and impedance", Transactions ASME - J. Engineering for Industry **87**, 9-21.