Einheitliche Beschreibung der Körperschallleistung in Balken verschiedener Gestalt

Gerhard Hübner*, Patrick Kurtz**

*ITSM, Universität Stuttgart, **BAuA Dortmund

1 Einleitung

Der in den letzten ein bis zwei Jahrzehnten festzustellende Durchbruch der Luftschallintensitätsmessung war einerseits durch die gelungene gerätemäßige Realisierung der betreffenden physikalischen Größe aber auch durch die großen Vorteile dieser Technik bei der Schallleistungsbestimmung technischer Schallquellen unter in situ Bedingungen begründet. Damit ist aber auch die Frage nach einer entsprechenden Grundlage und deren experimenteller Umsetzung einer Körperschallintensität bzw. einer Körperschallleistungsbestimmung zunehmend aktueller geworden. Beschränkt man sich hierbei zunächst auf Balken, also Festkörper, die quasi-eindimensional bis zu Körperschallwellenlängen beschrieben werden können, die etwa bis zum 2 bis 3-fachen der Querabmessungen herunter reichen, so bietet die theoretische Beschreibung nach derzeitigem Wissensstand nicht nur ein von der Balkengestalt - gerader Balken, Kreisbogen, Spiralbalken, ... - sehr uneinheitliches sondern ein für den Physiker auch wenig verständliches Bild. Ohne Zweifel lassen sich in einem Balken Wellen anregen, die zugehörigen Bewegungsgleichungen für z. B. die Longitudinalwelle und die Biegewelle des geraden Balkens von 2. bzw. 4., für die Kreisbogenbalken und für den Spiralbalken von 6. bzw. 12. Ordnung - unterscheiden sich aber grundlegend von den Bewegungsgleichungen von Wellen wie man diese nicht nur beispielsweise für die elektromagnetische Welle nach Maxwell sondern auch für das dreidimensionale elastische Kontinuum kennt. Diese Wellen werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben, die stets nur von 2. Ordnung bezüglich Ort und Zeit sind. Betrachtet man nun ferner die in der Literatur bekannten Darstellungen der Körperschallintensität, bei Balken der zugeordneten Körperschallleistung, so überrascht nach der zuvor geschilderten Diversität es nicht, dass bekannte Beschreibungen der Körperschallleistung P bei der Biegewelle in geraden Stäben, wie z.B.von Noiseux, Pavic und Verheij (s. z.B. [1]) angegeben, mit einer Form

$$P = E\,I_y \left[\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,t} - \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}}^{\,t} \right] \tag{1}$$

sich bereits schon wegen der höheren und gemischten Orts-Zeit-Ableitungen sich auch schwer messtechnisch umsetzen lassen. Entsprechende Gleichungen für Balken mit nicht geraden Zentrallinien oder mit verwundenem Querschnitt sind unbekannt. Die Arbeit beschäftigt sich mit einer Darstellung der Körperschallleistung in Balken beliebiger Zentrallíniengestalt, bei dem außerdem die Querschnittsfläche variabel und auch längs der Zentrallinie verwunden sein kann.

2 Zusammengefasste Grundlagen der wellentheoretischen Beschreibung von Körperschall in Balken

Im Rahmen des zur Verfügung stehenden Platzes kann hier die wellentheoretische (WT) Beschreibung des Körperschalls in beliebig gestalteten Balken nur mit den wesentlichen Voraussetzungen, den Unterschieden zu den "klassischen" Körperschallbeschreibungen und den resultierenden Grundgleichungen gegeben werden. Zu Einzelheiten wird auf [2] und [3] verwiesen.

Wesentliche Unterschiede der WT zur üblichen Körperschallbeschreibung in Balken bestehen in der Definition des Verschiebungsvektors **s** und Beanspruchungsvektors **q** sowie in der ausdrücklich notwendigen Zulassung von Termen, die üblicherweise als "Nebeneinflüsse" bezeichnet und häufig vernachlässigt werden. Diese Vektoren (Motoren im Mieses'schen Sinn) umfassen die 3 Translationen (u, v, w) eines Zentrallinienpunktes sowie die 3 Winkeldrehungen (α, β, γ) der Querschnittsfläche. Analog setzt sich der WT-Beanspruchungsvektor aus Quer- und Longitudinalkräften (Q, S, T) und den 3 Momenten (B, G, H) zusammen.

$$\mathbf{s} = (u,v,w,\alpha,\beta,\gamma) \quad \mathbf{q} = (Q,S,T,B,G,H) \quad \mathbf{p} = (X,Y,Z,K,L,M) \tag{2}$$

wobei **p** die von außen einwirkenden Kräfte/Momente beschreibt.

Hiermit lassen sich die durch die "Nebeneinflüsse" ergänzten Grundgleichungen in direkter Fortführung der von Love [4] bekannten Beziehungen schreiben als

Gleichgewichtsgleichung | Materialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} = \mathbf{B}_{21}\,\mathbf{q} + \mathbf{B}_{22}\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} - \mathbf{p} \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = \mathbf{B}_{11}\,\mathbf{s} + \mathbf{B}_{12}\,\mathbf{q} \tag{3}$$

$$\mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} \rho q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} (G q_{sx})^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (G q_{sy})^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (Eq)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (EI_x)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (EI_y)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (G I_T)^{-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{11,\mathrm{as}} + \mathbf{B}_{11,\mathrm{R}} \qquad \mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{11,\mathrm{as}} - \mathbf{B}_{11,\mathrm{R}}^{TR} \tag{6}$$

$$\mathbf{B}_{11,\mathrm{as}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \kappa_z & -\kappa_y & & & \\ -\kappa_z & 0 & \kappa_x & & 0 & \\ \kappa_y & -\kappa_x & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & \kappa_z & -\kappa_y \\ & 0 & & -\kappa_z & 0 & \kappa_x \\ & & & \kappa_y & -\kappa_x & 0 \end{array}\right); \mathbf{B}_{11,\mathrm{R}} = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & \end{array}\right) \tag{7}$$

Neben den üblicherweise verwendeten Symbolen $\rho\,q$ und $\rho\,I_x$, $\rho\,I_y$, $\rho\,I_z$ für die translatorischen und rotatorischen Trägheiten, den $G\,q_{sx}$, $G\,q_{sy}$, $E\,q$ für die Schub- und Dehnsteifen stellen die $\{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z\}$ = $\boldsymbol{\kappa}$ die Komponenten des die Balkengeometrie und Querschnittsverwindung beschreibenden Darboux-Vektors $\boldsymbol{\kappa}$ dar.

Aus den Gln. (1) und (2) ergibt sich die sämtliche Balkengestalten einheitlich beschreibende **tatsächliche** Wellengleichung

$$\mathbf{A}_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial s^2} + \mathbf{B}_1\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} + \mathbf{C}_1\,\mathbf{s} = \mathbf{D}_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} - \mathbf{p} \tag{8}$$

wobei

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_{12}^{-1}; \qquad \mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_{12}^{-1}\,\mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{21}\,\mathbf{B}_{12}^{-1} + \frac{\partial\,\mathbf{B}_{12}^{-1}}{\partial s}; \\ \mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_{21}\,\mathbf{B}_{12}^{-1}\,\mathbf{B}_{11} - \frac{\partial\,\mathbf{B}_{12}^{-1}}{\partial s}\,\mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{12}^{-1}\frac{\partial\,\mathbf{B}_{11}}{\partial s}; \qquad \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_{22} \end{gathered} \tag{9}$$

Die Darstellung der Verschiebungsgleichung (8) ist allerdings daran zwingend gebunden, dass die Matrix $\mathbf{B}_{12}$ nicht singulär ist, also für diese Diagonalmatrix sämtliche Elemente ungleich Null sind, die Schubsteifen also endlich groß angesetzt werden und somit die entsprechenden "Nebeneinflüsse" berücksichtigt sind. Die zu Gl. (8) analog herstellbare Wellengleichung der Beanspruchung **q** ist entsprechend an das Nichtverschwinden der Determinante der Diagonalmatrix $\mathbf{B}_{22}$, also an nicht verschwindende rotatorische Querschnittsträgheiten gebunden.

Aus den Gln. (3) leitet sich der Energiesatz für den Balkenkörperschall mit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\right\} = -\frac{\partial}{\partial s} P + P_{\text{a}} \tag{10}$$

ab (Einzelheiten siehe [3]), wobei

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{D}_1 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle; \quad E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{D}_2\ \mathbf{q}, \mathbf{q} \right\rangle; \tag{11}$$

und insbesondere die durch die Balken durchtretende Körperschallleistung dargestellt ist durch

$$P = -\left\langle \mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle \tag{12}$$

Schließlich beschreibt

$$P_{\text{a}} = -\left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle \tag{13}$$

die von äußeren Kräften/Momenten **p** je Längeneinheit am Balken aufgebrachte Leistung.

3 Körperschallleistung in Balken beliebiger Gestalt

Die Körperschallleistung in Balken nach Gl. (12) kann durch die Verschiebungsgröße **s** auch allein ausgedrückt werden, sofern man mit Hilfe der Gl. (3).

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}_{12}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} - \mathbf{B}_{11}\ \mathbf{s} \right) \tag{14}$$

verwendet:

$$P = -\left\langle \mathbf{B}_{12}^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \mathbf{B}_{12}^{-1}\mathbf{B}_{11}\ \mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle \tag{15}$$

Auch diese Darstellung setzt mit Gl. (14) zwingend voraus, dass $\mathbf{B}_{12}$ nicht singulär ist, keiner der entsprechenden Nebeneinflüsse vernachlässigt ist. Mit den Gln. (6) und (7) lässt sich anstelle der Gl. (15) für die zeitlich gemittelte Körperschallleistung notieren

$$\overline{P} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} \tag{16}$$

mit

$$\overline{P_1} = \overline{\left\langle \mathbf{B}_{12}^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle}^{t} \quad \overline{P_2} = \overline{\left\langle \mathbf{B}_{12}^{-1}\ \mathbf{B}_{11,\text{as}}\ \mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle}^{t}$$
$$\overline{P_3} = \overline{\left\langle \mathbf{B}_{12}^{-1}\ \mathbf{B}_{11,\text{R}}\ \mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\rangle}^{t} \tag{17}$$

Wir betrachten nun diese Terme im Einzelnen.

Zunächst ist zu konstatieren, dass die WT-Darstellung im Gegensatz zur üblichen Körperschallleistungsbeschreibung (Gl.(1)) nur Ableitungen erster Ordnung nach der Ortskoordinate s und der Zeit t und also auch keine gemischten Orts/Zeit-Ableitungen enthält.

P_1, der "Auto-Term", ist auch darstellbar durch

$$\overline{P_1} = \sum_{i=1}^{6} St_i \overline{\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial u_i}{\partial t}}^{t} \tag{18}$$

wobei der Einfachheit halber die u_i mit $i = 1,\ 2,\ ...,\ 6$ die Komponenten von **s** nach Gl. (2) und St_i die Querschnittssteifen entsprechend der 6 verschiedenen Größen der Matrix (5) sind. Dieser Teil der Gesamtschallleistung P ist damit allein durch die differenzielle örtliche und zeitliche Änderung der **s**-Komponenten und die Querschnittssteifen bestimmt, ist also unabhängig von der Gestalt der Balkenzentrallinie.

Die gleiche Aussage gilt auch für die Teilleistung P_3, wobei für alle Balkenformen einheitlich

$$\overline{P_3} = \mathsf{G}\ q_{sx} \overline{\frac{\partial u}{\partial t}\ \beta}^{t} - \mathsf{G}\ q_{sx} \overline{\frac{\partial v}{\partial t}\ \alpha}^{t} \tag{19}$$

ist. Der grundsätzliche Unterschied zwischen den P_1 und P_3-Darstellungen besteht darin, dass in P_1 Produkte der Ableitungen gleicher **s**-Komponenten und in P_3 Produkte der Ableitungen verschiedener **s**-Komponenten zeitlich zu mitteln sind. P_3 beschreibt somit eine Wechselwirkungsleistung.

Aber auch P_2 stellt eine durch das Zusammenwirken verschiedener Freiheitsgrade bzw. Vektorkomponenten zustande kommende Wechselwirkungsleistung dar. Dies ergibt sich aus der Schiefsymmetrie der in P_2 enthaltenen auch die Zentrallliniengestalt enthaltenden Matrix $\mathbf{B}_{11,\text{as}}$.

4 Körperschallleistung in Balken einfacher Gestalt

Während im allgemein gestalteten Balken die Körperschallbeschreibung, wie zuvor dargelegt, im 6-dimensionalen Raum des Verschiebungsvektors **s** erfolgt, tritt bei Balken einfacher Gestalt ein Zerfall, also eine Teilentkopplung der **s**-Komponenten und Matrizen ein. Der Körperschall in einem eben gekrümmten Kreisbogen (Ring) wird beispielsweise durch zwei Wellengleichungen des Typs der Gl. (8) beschrieben, wobei die zugehörigen Matrizen $\mathbf{A}_1$, ..., $\mathbf{D}_1$ nun nur noch von 3. Rang sind und die zugehörigen Verschiebungsvektoren sind reduziert auf

$$\mathbf{s}_1 = (u, \beta, w) \qquad \mathbf{s}_2 = (\alpha, v, \gamma) \tag{20}$$

Für die Wellen im geraden Balken konstanten Querschnitts tritt ein weiterer Zerfall wie folgt ein:

Biegeschwingungen: $\mathbf{s}_1 = (u, \beta) \quad \mathbf{s}_2 = (v, \alpha)$ (21)

Logitudinalschwingung: $\mathbf{s}_3 = (w)$ (22)

Torsionsschwingung: $\mathbf{s}_4 = (\gamma)$ (23)

Für die Biegeschwingung in der (x,z)-Ebene eines solchen geraden Balkens erhält man für die relevanten Matrizen dann:

$$\mathbf{B}_{22}^{(x,z)} = \begin{pmatrix} \rho q & 0 \\ 0 & \rho I_y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_{12}^{(x,z)} = \begin{pmatrix} 1/\left(\mathsf{G}\ q_{sy}\right) & 0 \\ 0 & 1/\left(E\ q_{sy}\right) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}_{21}^{(x,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_{11}^{(x,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

und schließlich explizit dargestellt:

$$\overline{P^{(x,z)}} = -\overline{\left\langle \mathsf{G}\ q_{sx} \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle}^{t} - \overline{\left\langle E\ I_y \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\rangle}^{t}$$
$$+ \overline{\left\langle \mathsf{G}\ q_{sx} \beta, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle}^{t} \tag{25}$$

und für eine Modenwelle

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{0i}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_i s)} \qquad \mathbf{s}_{0i} = \{u_{0i}; \beta_{0i}\} \tag{26}$$

ergibt sich die Wirkleistung zu

$$\begin{aligned}\overline{P_i^{(x,z)}} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{k_i\}\ \omega\ \mathsf{G}\ q_{sx}\ |u_{0i}|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{k_i\}\ \omega\ E\ I_y\ |\beta_{0i}|^2 \\ &\quad - \mathsf{G}\ q_{sx}\ \frac{\omega}{2}\ \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\ \beta_{0i}\ u_{0i}^{*}\right\} \\ &= \overline{P_{i,u}} + \overline{P_{i,\beta}} + \overline{P_{i,u\beta}}\end{aligned} \tag{27}$$

Im Vortrag wird das Ergebnis nach Gl. (27) graphisch aufgezeigt und diskutiert.

Literatur

[1] Pavic, G.: *Measurement of structure borne wave intensity, Part I: Formulation of the methods.* J. Sound Vib. 49, 1976, 221-230

[2] Hübner, G.: *Ein Beitrag zur mathematischen Behandlung erzwungenen Körperschalls in allgemein gestalteten Stäben mit Anwendungen.* Diss. TU Berlin, 1970

[3] Hübner, G.: *Structure Borne Noise in Arbitrarily Shaped Bars.* Proceedings of NOVEM 2000 on CDROM, Lyon, 2000

[4] Love, A.E.H.: *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Dover Publications, New York, 1948