Formulierung der Schallausbreitung über einer ebenen Fläche mit variierender akustischer Impedanz im Zeitbereich

Wolfgang Kropp*****, Peter Svensson**, Jens Forssén*

*Chalmers University of Technology, Department of Applied Acoustics, S-41296 Göteborg , Sweden
**Norwegian University of Science and Technology, Telecommunications, N-7491 Trondheim, Norway

1 Einleitung

Die Schallausbreitung von einer Quelle zum Empfänger kann für bestimmte geometrische Verhältnisse stark durch die akustische Impedanz der Bodenoberfläche beeinflußt werden. Um diesen Einfluß in Berechnungsmodellen für die Schallausbreitung zu berücksichtigen werden Frequenzbereichslösungen für Punktquellen über einer Ebene mit endlicher Impedanz benutzt. Die Lösung ist kompliziert und existiert nicht in geschlossener Form. Statt dessen werden approximative Lösungen angewendet. Die Verhältnisse werden noch komplizierter wenn die Impedanz des Bodens ortsabhängig ist, oder wenn die Quelle eine komplexe Richtcharakteristik besitzt (siehe auch Mechel [1]). Im folgende wird eine einfaches Ersatzquellenmodell präsentiert, das zu einem schnellen numerischen Verfahren führt. Es kann sowohl im Frequenzbereich (siehe [2]) als auch im Zeitbereich formuliert werden und ist immer dann von Vorteil, wenn nur Teile der Oberfläche eine endliche, lokal reagierende Impedanz aufweisen, ansonsten aber die Oberfläche als ”schallhart” betrachtet werden kann.

2 Theorie

Die Grundidee ist - wie so oft bei der Behandlung dieses Problems - das Schallfeld aus dem Feld der Quelle und ihrer Spiegelquelle zusammen zu setzen. Die dabei nicht korrekt wiedergegebenen akustischen Eigenschaften des Bodens werden durch zusätzliche Quellterme berücksichtigt (siehe Abbildung 1). Die Spiegelquelle ist so gewählt, daß sie zusammen mit der Originalquelle die Randbedingung für eine schallharte Bodenoberfläche erfüllt, d.h. die Schallschnelle lotrecht zur Oberfläche null ist. In Gebieten, die nicht schallhart sind, werden Ersatzquellen auf der Oberfläche plaziert. Die Amplitude dieser Quellen (Volumenfluß) wird so gewählt, daß sich zusammen mit dem totalen Schalldruck vor der Fläche (von Originalquelle, Spiegelquelle und allen Ersatzquellen) die korrekte Impedanz ergibt.

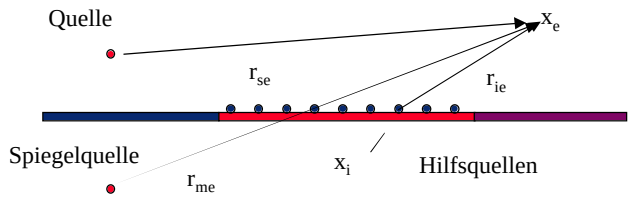

Abbildung 1. Berücksichtigung von nicht “schallharten“ Gebieten bei Ersatz- oder Hilfsquellen

Der Schalldruck p_{tot} in einem beliebigen Punkt ist

$$p_{tot}(x_e, y=0, t) = p_{org}(x_e, y=0, t) + p_{ima}(x_e, y=0, t) + \sum_i p_{ie}(x_e, y=0, t) \quad (1)$$

wobei p_{org}, p_{ima} und p_{ie} die Beiträge von der Quelle, der Spiegelquelle und aller Hilfsquellen sind. Diese Beiträge sind durch die jeweilige Quellenamplitude und der entsprechenden Übertragungsfunktion beschrieben. In der Formulierung im Zeitbereich entspricht dies einer Faltung der Quellenamplituden (Q_{org}, Q_{ima} und Q_i) mit den Green‘schen Funktionen oder Impulsantwortfunktionen $g(r,t)$.

$$p_{tot}(x_e, y=0, t) = Q_{org}(t) * g(r_{se}, t) + Q_{org}(t) * g(r_{me}, t) + \sum_i Q_i * g(r_{ie}, t) \quad (2)$$

Die unbekannten Amplituden Q_i der Hilfsquellen müssen durch die vorgeschriebenen akustischen Eigenschaften an der Oberfläche bestimmt werden. Auch in diesem Fall muß an Stelle der Impedanz die Impulsantwort benutzt werden, die hier als $z(t)$ bezeichnet wird. Gleichung (2) kann auch für einen Punkt direkt vor der Oberfläche geschrieben werden:

$$p_e(t) = 2p_{se}(t) + \sum_i Q_i(t) * g_{ie}(t) \quad . \quad (3)$$

Die Schnelle senkrecht zur Oberfläche in diesem Punkt ist jedoch nur durch die Amplitude der Hilfsquelle in diesem Punkt bestimmt. Daher gilt

$$p_e(t) = Q_e(t) * z_e(t) \quad . \quad (4)$$

Damit hat man im Prinzip alle erforderlichen Gleichungen, jedoch muß man für eine numerische Auswertung zu diskreten Zeitschritten übergehen. Nutzt man gleichzeitig noch die Tatsache aus, daß alle Impulsantwortfunktionen kausal sein müssen so erhält man für Gleichung (4)

$$\begin{aligned} p_e(N) &= \sum_{n=0}^{N} Q_e(n) z(N-n) \Delta t \\ &= Q_e(N) z(0) \Delta t + \sum_{n=0}^{N-1} Q_e(n) z(N-n) \Delta t \\ &= Q_e(N) z(0) \Delta t + A_e(N) \end{aligned} \quad (5)$$

wobei A_e nur Beiträge aus der Vergangenheit enthält, jedoch nach jedem Zeitschritt neu berechnet werden muß. Die Faltung in Gleichung (3) kann in gleicher Weise geschrieben werden. Zusammen mit Gleichung (5) erhält

man so ein einfaches Gleichungssystem zu Bestimmung der unbekannten Amplituden Q_i.

$$\sum_i Q_i\left[z_i(0)\delta_{i,e} - g_{ie}(0)\right]\Delta t = 2p_{se}(N) - A_e(N) + B_e(N) \quad (6)$$

mit $B_e(N) = \sum_i \sum_{n=0}^{N-1} Q_i(n) g_{ie}(N-n)\Delta t$.

Da die Koeffizienten des Gleichungssystems unabhängig von der Zeit sind, muß das System nur einmal invertiert werden. Jedoch muß dann für jeden Zeitschritt eine neue Lösung berechnet werden. Man kommt sogar ohne Lösung des Gleichungssystems aus, wenn man die Abtastrate so hoch wählt, daß $g_{ie}(0) = 0$ für verschiedene Punkte i und e auf der Oberfläche erfüllt ist.

3 Implementation für den zweidimensionalen Fall

Für eine Implementation benötigt man die Green'schen Funktionen für die Beschreibung der akustischen Oberflächeneigenschaften und für die Schallausbreitung zwischen Sende- und Empfängerpositionen. Für die Schallausbreitung zwischen (x_0, y_0) und (x, y) findet man z.B. in [2]

$$g(x, x_0, y, y_0, t) = \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} \quad . \quad (7)$$

Für die diskrete Form ist es notwendig Gleichung (6) über das Zeitintervall Δt zu integrieren. Die Green'sche Funktion für die Oberfläche kann entweder direkt als Impulsantwort gemessen oder als inverse Fouriertransformation der Oberflächenimpedanz berechnet werden.

Zeit- und Ortsauflösung sind durch den gewünschten Frequenzumfang ($f_{\max}$) bestimmt. Im Folgenden wurde mit einer Abtastrate $f_{tast} = 10 f_{\max}$ und einer Ortsauflösung $dx = 2c/f_{tast}$ gearbeitet. Für den Volumenfluß der Quelle wurde eine tiefpassgefilterte Version der Zeitableitung der Dirac Funktion benutzt (siehe Abbildung 2)

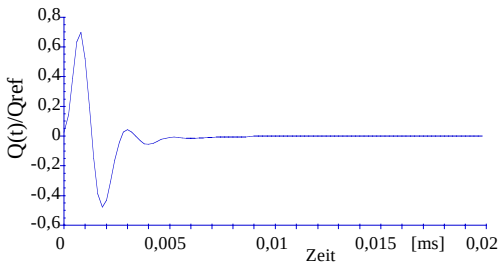

Abbildung 2. Volumenfluß der Originalquelle

4 Beispiel

Für einen einfachen Test der Methode soll versucht werden mit Hilfe der Quellverteilung längs der Oberfläche eine "schallweiche" Randbedingung zu erfüllen. Vorteil ist in diesem Fall, daß direkt eine analytische Lösung in der Form einer Spiegelquelle mit zur Originalquelle entgegengesetzte Amplitude zum Vergleich benutzt werden kann. Abbildung 3 zeigt die Anordnung von Quell- und Empfangsposition, sowie das Gebiet, das als "schallweich" angenommen wurde.

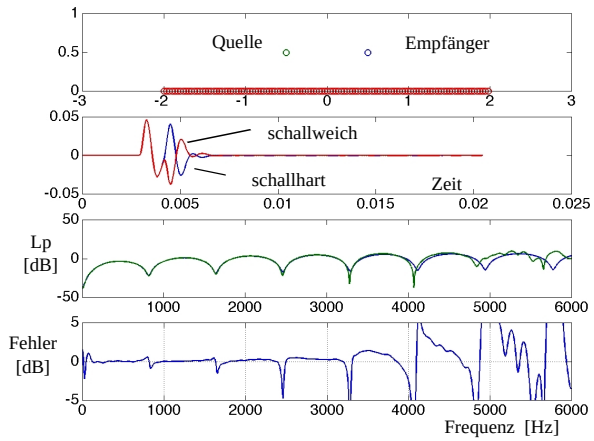

Abbildung 3. Resultat numerischer Berechnungen.

Die Unterschiede in der Impulsantwort für die exakte analytische Lösung (gestrichelt) und die numerische Lösung sind kaum sichtbar. Wie erwartet kommt der zweite Puls auf Grund der Reflexion an der schallweichen Oberfläche mit umgekehrtem Vorzeichen. Zum Vergleich ist auch die Antwort für eine schallharte Oberfläche eingezeichnet. Der Fehler zwischen analytischer Lösung und dem Model sind sehr klein für Frequenzen unter 2000 Hz (Tastfrequenz war 20kHz). Die größten Fehler treten für die Frequenzen auf, bei denen die Interferenz zwischen direktem und reflektiertem Schall zu Minima im Schalldruck führt. Für diese Frequenzen ist die exakte Phase sehr wichtig und kleine Fehler können leicht zu Abweichungen im Druckfeld führen.

5 Zusammenfassung

Die hier vorgestellte Methode erlaubt ein schnelles Berechnen des Einflusses der Oberflächenimpedanz auf die Schallausbreitung. Berechnungszeiten für Fälle wie im obigen Beispiel gezeigt, liegen im Bereich einiger Sekunden auf einem normalen PC. Die Methode erlaubt eine beliebige ortsabhängige Impedanzverteilung zu berücksichtigen. Als nächste Schritte in der Entwicklung der Methode bedarf es jedoch Vergleiche mit Messungen unter der Anwendung von gemessenen Oberflächenimpedanzen.

6 Literatur

[1] F. Mechel, A line source above a plane absorber, ACUSTICA – acta acustic 86 (2000), 203-215

[2] F.X. Bécot et al., Noise propagation over inhomgenous ground using an extended Rayleigh integral method, submitted to ACUSTICA – acta acustic, April 2001

[3] Crighton D G, Dowling A P,Ffowcs Williams J E, Heckl M, Leppington F G, (1992), Modern methods in Analytical Acoustics, Springer Verlag, Berlin.