

Strömungsakustische Instabilitäten an einer überströmten, nachgiebigen Wand

J. Großer, D. Ronneberger

III. Physikalisches Institut, Universität Göttingen, Bürgerstr. 42–44, 37073 Göttingen

Zusammenfassung: Wir untersuchen die Verstärkung von Schall in luftdurchströmten Kanälen und versuchen, unsere Beobachtungen durch eine hydrodynamische Mode zu erklären, die entlang der schalldämpfend ausgekleideten Wand läuft.

Motivation

Ziel unserer Untersuchungen ist die Deutung eines Schallverstärkungsphänomens, das in turbulent luftdurchströmten, schalldämpfend ausgekleideten Kanälen (siehe Abb. 1) bei hohen Machzahlen auftritt¹. Wir beobachten bei Beschallung in Strömungsrichtung Transmissionskoeffizienten größer als eins, und zwar bei Frequenzen oberhalb der Kammerresonanz der Auskleidung, die bei ruhendem Medium oder niedrigen Machzahlen zu starker Schalldämpfung führen.

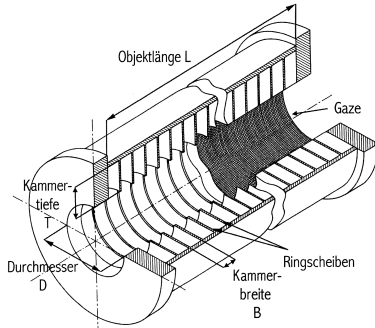


Abb. 1: Kanalstück mit Quasi- $\lambda/4$ -Resonatoren. Kammern sind durch Metallgaze vom Kanal getrennt.

Wir erklären uns dieses Phänomen mit der Anregung einer instabilen hydrodynamischen Mode an der als lokal nachgiebig gedachten Wand, die der Gleichströmung Energie entzieht und am Stromab-Ende der Auskleidung Schall höherer Amplitude abstrahlt. Der mit dem Energietransfer einhergehende Druckabfall wurde beobachtet und läßt sich prinzipiell für die Erzeugung niederfrequenten Schalls ohne bewegliche Teile benutzen². Diese Tatsache macht das beobachtete Phänomen für uns im Hinblick auf Anwendungen interessant.

Lösungen an einer ebenen, inkompressibel überströmten Wand

Als einfachstes Modell betrachten wir eine ebene Wand, bei der die Auskleidung durch eine nur von der Frequenz abhängige (lokale) Wandimpedanz $Z = Z(\omega)$ modelliert wird. Das Strömungsprofil sei als rechteckig angenommen, daß heißt, die Grenzschicht habe eine vernachlässigbare Dicke. Wir rechnen inkompressibel und suchen nach Moden der allgemeinen Gestalt

$$\tilde{p} = p_0 e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} \quad (1)$$

Die Differentialgleichung für den Wechseldruck hat dann die Gestalt

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad (2)$$

mit den Randbedingungen

$$\tilde{p} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (3)$$

$$\tilde{p} = \left(\frac{\omega}{\omega'}\right) Z(\omega) \tilde{v}, \quad y = 0 \quad (4)$$

wobei $\omega' = \omega - uk_x$ die Doppler-verschobene Frequenz im mitbewegten Koordinatensystem ist. u sei der Mittelwert der Gleichströmungsgeschwindigkeit. Mit der ersten Randbedingung ist sichergestellt, daß nur an der Wand lokalisierte Lösungen betrachtet werden. Die zweite Randbedingung beschreibt das nachgiebige Verhalten der Wand mit einer Impedanz Z . Der Faktor ω/ω' wird eingefügt, weil Auslenkungen durch die Grenzschicht gereicht werden, so daß die Schnelle an der Wand mit der Schnelle in der Hauptströmung in ebendiesem Verhältnis stehen. Die Gleichungen 2, 3 und 4 führen auf vier Lösungen für die Wellenzahlen in Abhängigkeit von Kreisfrequenz und Impedanz:

$$k_x^{\pm[\pm]} = \frac{\omega}{u} \left(1 \mp \frac{iZ}{2\rho u} \mp [\pm] i \sqrt{\frac{Z^2}{4(\rho u)^2} \pm \frac{iZ}{\rho u}} \right) \quad (5)$$

$$k_y^{\pm[\pm]} = \pm i k_x^{\pm[\pm]} \quad (6)$$

ρ ist der Gleichanteil der Luftdichte. Das erste Vorzeichen gibt die Ausbreitungsrichtung der Phasenfronten einer Lösung an:

$$\text{Re } k_x^{+[\pm]} > 0, \quad \text{Re } k_x^{-[\pm]} < 0, \quad (7)$$

Bildet man den Grenzübergang $u \rightarrow 0$, so stellt man fest, daß die Lösungen $k_x^{\pm[\pm]}$ divergieren, während $k_x^{\pm[-]}$ Lösungen bleiben, solange $\text{Im } Z(\omega) > 0$.

Vergleich mit kompressiblen Lösungen und Lösungen in Kanälen mit kreisförmigem Querschnitt

Um die Abhängigkeit der Wellenzahl von der Frequenz diskutieren zu können, muß $Z(\omega)$ gegeben sein. Wir nehmen an, daß die Wand resonanzartig reagiert:

$$Z(\omega) = R + \frac{iM}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) \quad (8)$$

Physikalisch sinnvoll sind nur Widerstände $R > 0$. Der Imaginärteil von Z ändert bei ω_0 sein Vorzeichen von (+) bei tiefen nach (-) bei hohen Frequenzen (Wechsel von federartiger zu masseartiger Impedanz).

Es folgen die prinzipiellen Verläufe der Real- und Imaginärteile der Wellenzahl $k_x^{\pm[\pm]}$ in Abhängigkeit von der

¹M. Brandes, D. Ronneberger, Fortschritte d. Akustik DAGA 95, 539–542; M. Brandes, Diss. Math.-Nat. Fak., Göttingen 1997

²B. Lange, Dipl. III. Phys. Inst. Univ. Göttingen, 1998; zur Veröffentlichung eingereicht bei Acustica/acta acustica

Kreisfrequenz bei $u > 0$. Die Resonanzfrequenz liegt bei $\omega = 1$. Die Realteile sind hell, die Imaginärteile dunkel gezeichnet. Jede Lösung besitzt eine Maximalfrequenz, bei der der Realteil von k_x sein Vorzeichen ändert und damit auch der Imaginärteil von k_y . Oberhalb der entsprechenden Frequenzen ist die Randbedingung im Unendlichen verletzt und die Lösung nicht mehr an der Wand lokalisiert.

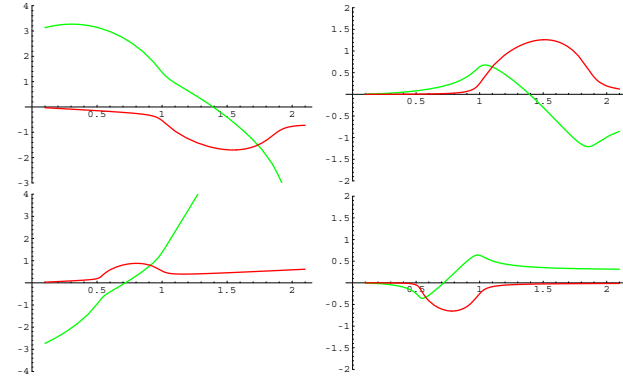


Abb. 2: Lösungen $k_x^{+[+]}$, $k_x^{+[-]}$, $k_x^{-[+]}$ und $k_x^{-[-]}$

Im Kanal mit kreisrundem Querschnitt werden diese Lösung zu vier Moden, die zu den abzählbar unendlich vielen ordinären Schallmoden hinzukommen. Den Verlauf dieser (nur noch numerisch zugänglichen) Lösungen zeigt Abb. 3.

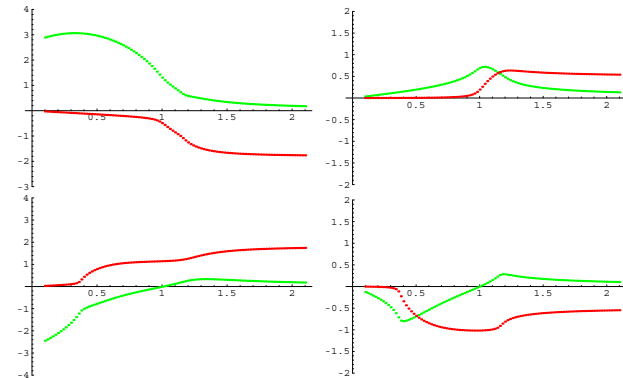


Abb. 3: Lösungen für den Fall eines Kanals mit kreisrundem Querschnitt

Im Gegensatz zur ebenen Wand verändern sich hier die Wellenzahlen für hohe Frequenzen nur noch wenig. Eine kompressible Rechnung bestätigt, daß in dem für uns relevanten Machzahl-Bereich bis ca. 0.35 die inkompressible Näherung nur geringe Abweichungen der $k_x(\omega)$ -Kennlinie vom tatsächlichen Verlauf bewirkt.

Diskussion der Ausbreitungsrichtung und Stabilität

Um zu entscheiden, ob eine Lösung eine konvektiv instabile hydrodynamische Mode ist, müssen wir Laufrichtung und Anfachung untersuchen.

Diese Analyse ist nicht trivial, da bei einer zeitharmonischen Lösung a priori nicht klar ist, in welche Richtung sie sich ausbreitet. Da ein solches Signal keinen zeitlichen Anfang besitzt, ist es nicht ohne weiteres möglich, das kausale Verhalten zu studieren.

Die naheliegendste Methode ist es, das Verhalten von Wellengruppen und der Gruppengeschwindigkeit zu studieren. Da wir es mit komplexen Dispersionsrelationen zu tun haben, erhält man auch eine komplexe Gruppengeschwindigkeit. Dabei beschreibt der Realteil, wie schnell sich eine Gruppe ausbreitet, der Imaginärteil, wie schnell sie verformt wird.

Untersucht man raum-zeitlich gaußförmige Signale, so kann man durch Wahl einer komplexen Breite σ —solange die Gruppengeschwindigkeit nicht rein imaginär wird—stets erreichen, daß die Signale in eine wohlbestimmte Richtung laufen. Diese Analyse ergibt folgende Resultate:

- $k_x^{+[+]}$: gedämpft stromauf laufend
- $k_x^{+[-]}$: Wechsel von gedämpft stromab nach angefacht stromauf laufend bei höheren Frequenzen
- $k_x^{-[+]}$: gedämpft stromab laufend
- $k_x^{-[-]}$: Wechsel von gedämpft stromauf nach angefacht stromab laufend

Diese Identifikation widerspricht gänzlich den gemachten Beobachtungen.

Eine andere Analyse wird von Rienstra³ vorgeschlagen. Er untersucht mit der Wiener-Hopf-Methode die Streuung einer stromab einfallenden ebenen Schallwelle an einer Diskontinuität schallhart-schallnachgiebig. Es zeigt sich, daß in der Streulösung stromab alle Lösungen bis auf $k_x^{-[-]}$ enthalten sein müssen, folglich laufen alle Moden bis auf $k_x^{-[-]}$ stromab. Es folgt weiterhin, daß alle Moden bis auf $k_x^{+[+]}$ gedämpft sind.

Obwohl diese Analyse sich eher mit unseren Beobachtungen deckt (Schallverstärkung nur stromab und im wesentlichen erst ab der Resonanzfrequenz der Wand), bleibt sie für uns etwas unbefriedigend, weil kein physikalisch unmittelbar einsichtiges Argument für die Laufrichtung angegeben wird: Ob eine Mode (in Gestalt des dazugehörigen Pols im Wellenzahl-Raum) in die Streulösung eingeht, hängt in der zitierten Methode von ihrem Verhalten für große rein imaginäre ω ab.

Schlußfolgerungen, Ausblick

Bei der Untersuchung von Kandidaten für die von uns gesuchte Instabilitätsmode hat sich die Festlegung der Ausbreitungsrichtung als die wesentliche Schwierigkeit herausgestellt. Die Bereitstellung mathematisch präziser und physikalisch einsichtiger Argumente ist nach unserer Ansicht ein noch unzureichend gelöstes Problem. Unabhängig von der Interpretation der Lösungen gibt es aber in jedem Fall noch starke qualitative Abweichungen, wie etwa den völlig falschen Verlauf der Ausbreitungswellenzahl für höhere Frequenzen, die eine Erweiterung des Modells erfordern. Da sich in der Vergangenheit die Modulationen der turbulenten Wandschubspannungen durch die Lösung als maßgeblich herausgestellt haben⁴, soll dieser Effekt bei den zukünftigen Untersuchungen mitberücksichtigt werden.

³S. W. Rienstra, Hydrodynamic Instabilities and Surface Waves in a Flow over an Impedance Wall, IUTAM Symp., Lyon 1985

⁴J. Rebel, D. Ronneberger, Shear Effects in Flow Duct Acoustics, Journal of Sound and Vibration, 1992