

Eine Fouriemethode für die Helmholtz-Gleichung - am Beispiel des Dirichlet-RWP

(A new scheme for the Dirichlet BVP for the Helmholtz equation based on the Fourier transform)

Mirjam Köhl, Sergej Rjasanow,

Universität des Saarlandes, FR 6.1 -Mathematik, Saarbrücken, Email: koehl@num.uni-sb.de

Problembeschreibung

Wir betrachten das Dirichlet-Außenraumproblem (RWP) für die dreidimensionale Helmholtz-Gleichung, siehe auch [1] :

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + \kappa^2 u(x) &= 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} & \quad \kappa = \frac{\omega}{c}, \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

$\Gamma = \partial\Omega$ bezeichnet den hinreichend glatten Rand eines beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiets und g ist eine gegebene Funktion. Es ist bekannt, daß das Randwertproblem eindeutig lösbar ist, wenn wir für die Lösung zusätzlich fordern, daß sie die Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingungen für große $|x| = r$ erfüllt.

Wir interessieren uns für Lösungen des RWP (1) für ein Frequenzspektrum, d.h. wir haben das Problem für reelle Wellenzahlen κ mit $0 < \kappa < \kappa_{max}$ zu betrachten. Setzen wir zur numerischen Behandlung des Problems Randelementmethoden ein, so führen diese bekanntlich auf ein großdimensioniertes, komplexes, vollbesetztes Gleichungssystem. Der numerische Aufwand mittels direkten Solvern beträgt $O(M * N^3)$, N ist ein Maß für die Raumdiskretisierung und M bezeichnet die Anzahl der zu betrachtenden Frequenzen. Daher gilt es, effektive Lösungsmethoden für solche Probleme zu entwickeln.

Mathematisches Modell

Um die Idee unserer neuen Methode zu illustrieren, betrachten wir den Ansatz, daß die Lösung des RWP als Doppelschichtpotential dargestellt ist

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} f(x, \kappa) dF_x, \quad y \in \Omega^c.$$

Dieser Ansatz führt zu der Randintegralgleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{B} \right) f(y, \kappa) &\equiv \\ \frac{1}{2} f(y, \kappa) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} f(x, \kappa) dF_x &= g(y, \kappa), \end{aligned} \quad (2)$$

die es zu lösen gilt. Gilt $\kappa \in \mathbb{R}^+$, so ist diese Gleichung nur dann eindeutig lösbar, wenn $-\kappa^2$ kein Eigenwert des Neumann Innenraumproblems der Laplacegleichung ist. Für nähere Einzelheiten über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Helmholtz-Gleichung, siehe auch [1],[2],[6].

Zur Diskretisierung des Problems (2) verwenden wir das Kollokationsverfahren. Der Rand $\Gamma \approx \Gamma_h$ wird mittels eines Systems ebener Dreieckselemente Γ_j approximiert. Weiter wählen wir die Schwerpunkte der Dreiecke als Kollokationspunkte y_j und zerlegen die unbekannte Funktion $f(x, \kappa)$ gemäß

$$f_h(x, \kappa) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\kappa) \varphi_j(x),$$

wobei φ_j stückweise konstant auf Γ_j ist.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir folgendes lineares Gleichungssystem

$$\left(\frac{I}{2} + B(\kappa) \right) \alpha(\kappa) = \varrho(\kappa), \quad B \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \alpha, \varrho \in \mathbb{C}^N, \quad (3)$$

mit $(\alpha(\kappa))_j = \alpha_j(\kappa)$, $(\varrho(\kappa))_i = g(y_i, \kappa)$ und $(i, j = 1, \dots, N)$

$$b_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{i\kappa|x-y_i|}}{|x-y_i|^3} (i\kappa|x-y_i| - 1) \langle n_x, x-y_i \rangle dF_x.$$

Fouriermethode

Offensichtlich hängt die Matrix B in (3) explizit von der Wellenzahl κ ab. Daher wenden wir zunächst die Identität der Fouriertransformation bezüglich κ auf die Matrix an und lösen anschließend das resultierende Gleichungssystem.

Die transformierte Matrix

Wir wenden die eindimensionale inverse Fouriertransformierte auf die Matrix B an. Dabei ergeben sich die Einträge $\check{B} = \mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[B(\kappa)](\xi) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ zu

$$\begin{aligned} \check{b}_{ij}(\xi) &= \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^3} \left(r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=r-\xi} &\langle n_x, x-y_i \rangle dF_x \end{aligned} \quad (4)$$

mit $r = |x-y_i|$. Dabei haben wir ausgenutzt, daß für die Dirac- δ -Distribution die Beziehung

$$\mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[e^{i\kappa r} (i\kappa r - 1)](\xi) = \left(r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=\xi-r}$$

gilt, siehe auch [3].

Im allgemeinen sind diese Ausdrücke beliebig komplex und können zur Zeit nicht effektiv berechnet werden. Unter der Voraussetzung ebener Dreieckselemente Γ_j ist es jedoch möglich, die Integrale (4) mittels einer geeigneten Koordinatentransformation analytisch auszuwerten. Details dieser Berechnungsmethode finden Sie in [5]. Wie dort beschrieben und in Abbildung 1 dargestellt, werden wir unsere weiteren Betrachtungen auf diesen Spezialfall beschränken. Mit der Notation aus Abbildung 1 erhalten wir für die Elemente \check{b}_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$

$$\check{b}_{ij}(\xi) = \begin{cases} 0, & i = j \\ \frac{\Phi}{4\pi} \frac{d}{\xi} \delta(\xi - |d|) - \frac{1}{4\pi} \beta_{ij}(\xi) \mathbb{1}_{[\xi_{min}, \xi_{max}]}(\xi) & i \neq j \end{cases}$$

und
$$\beta_{ij}(\xi) = \frac{d}{\xi^2 - d^2} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 - d^2 - h^2}}. \quad (5)$$

Es sei bemerkt, daß stets $\xi_{min} \geq \xi_0 = \sqrt{d^2 + h^2}$ gilt und die Funktion $\beta_{ij}(\xi)$ in ξ_0 singular wird. Weiter besitzt jedes Element einen lokalen Träger und die Matrix $\check{B}(\xi)$ weist für ein festes ξ eine schwachbesetzte Struktur auf.

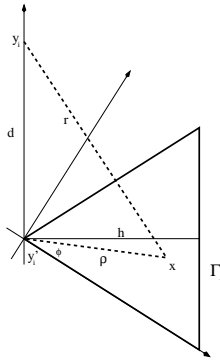


Abbildung 1: Berechnung der Elemente \tilde{b}_{ij} - die Projektion des Kollokationspunktes y_i fällt mit einer Ecke des Dreiecks Γ_j zusammen

Das neue Gleichungssystem

Wenden wir die Fouriertransformation auf die Einträge der Matrix $\tilde{B}(\xi)$ an, so erhalten wir aufgrund der Eigenschaften der Funktion $\tilde{b}_{ij}(\xi)$, $i \neq j$

$$(\mathcal{F}_{\xi, \kappa} [\tilde{b}_{ij}(\xi)])(\kappa) = \frac{\Phi}{4\pi} \operatorname{sgn}(d) e^{i\kappa|d|} - \frac{e^{i\kappa\xi_0}}{4\pi} \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \beta_{ij}(\xi) d\xi + \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \beta_{ij}(\xi) (e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}) d\xi. \quad (6)$$

Während die Funktion $\beta_{ij}(\xi)$ für $\xi \geq \xi_0$ eine Stammfunktion besitzt, ist der zweite Integrand in (6) nun eine glatte Funktion und das Integral kann numerisch ausgewertet werden. Die Anwendung der Gauß-Legendre Quadraturformel liefert eine neue Matrix $\tilde{B}(\kappa) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mit

$$\tilde{b}_{ii}(\kappa) = 0 \text{ und} \\ \tilde{b}_{ij}(\kappa) = \frac{\Phi}{4\pi} \operatorname{sgn}(d) e^{i\kappa|d|} - \frac{e^{i\kappa\xi_0}}{4\pi} \left(\gamma_{ij}(\xi) \Big|_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} + i\kappa h_\xi \sum_{k=1}^m w_k \bar{\beta}_{ij}(\xi_k) \operatorname{sinc}(\kappa\xi_k) e^{i\kappa\xi_k} \right), \quad (7)$$

d.h. wir haben nun das System

$$\left(\frac{I}{2} + \tilde{B}(\kappa) \right) \alpha(\kappa) = \varrho(\kappa) \quad (8)$$

zu lösen.

In (7) bezeichnen $\gamma_{ij}(\xi)$ die Stammfunktion und $\bar{\beta}_{ij}(\xi)$ die Approximierte von $\beta_{ij}(\xi)$. Da diese unabhängig von der Wahl der Wellenzahl sind, werden sie nur einmal berechnet und jeweils zur Lösung des Gleichungssystems (8) für alle $0 < \kappa < \kappa_{max}$ verwendet.

In analoger Weise kann man die Fouriermethode auch auf die Lösung des RWP (1), die als Einfachschichtpotential dargestellt ist, anwenden. Nähere Einzelheiten können in [4] oder [5] nachgelesen werden.

Numerische Beispiele

Wir betrachten die Streuung einer ebenen einfallenden Welle aus der Richtung $d = (1, 0, 0)^T$ an der Einheitskugel $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$. Stellen wir die Lösung gemäß des Ansatzes von Werner und Brackhage dar, siehe auch [1],[6] und wenden das oben beschriebene Kollokationsverfahren an, so haben wir das Gleichungssystem

$$\left(\frac{I}{2} + B - i\eta A \right) u = -e^{i\kappa d^T y}, \quad \eta > 0$$

mit Einfach- und Doppelschichtpotentialmatrizen A und B zu lösen.

Wir vergleichen die Lösungen u_{FT} , die wir mit der Fouriermethode erhalten und die Standardlösungen u_{ST} mit der analytischen Lösung $u(\kappa)$. Für eine Darstellung von $u(\kappa)$ sei z.B. auf [6] verwiesen. Weiter ist zu bemerken, daß wir im Fall u_{ST} alle Integrale numerisch auswerten.

Abbildung 2 zeigt den Fehler der Lösungen in der L_2 -Norm in Abhängigkeit der Wellenzahl κ für $N = 1280$. Dabei ist u_{FT} schwarz und u_{ST} als gestrichelte Linie dargestellt.

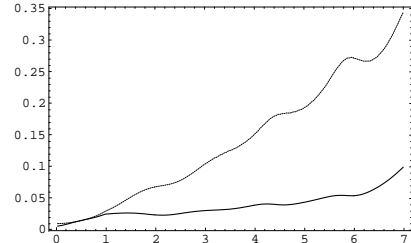


Abbildung 2: Fehler der Lösungen u_{FT} und u_{ST} in Abhängigkeit der Wellenzahl

In den folgenden Tabellen wird das Verhalten der Fourierlösung in Abhängigkeit der Dimension N aufgezeigt. Dabei unterscheiden wir zwischen dem Konvergenzverhalten der Lösung, wenn wir die Wellenzahl fixieren (Tabelle 1) und dem Verhalten des relativen Fehlers für variable Wellenzahlen mit $\kappa h \approx \text{const}$ (Tabelle 2).

N	κh	$\ u - u_{FT}\ _{L_2}$
20	1.65	1.17E-00
80	0.972	3.88E-01
320	0.511	1.05E-01
1280	0.259	2.69E-02

Tabelle 1: Konvergenz der Lösung u_{FT} für $\kappa = \pi/2$

N	κ	κh	$\ u - u_{FT}\ _{L_2} / \ u\ _{L_2}$
20	0.80	0.843	1.01E-01
80	1.60	0.990	6.08E-02
320	3.04	0.989	2.19E-02
1280	6.04	0.997	1.10E-02

Tabelle 2: Relativer Fehler von u_{FT} für variable κ

In allen Tests stimmen die Resultate der Fouriermethode sehr gut mit denen der analytischen Lösung überein. Weitere Beispiele finden sich in [4] oder [5].

¹ | G. Chen and J. Zhou. Boundary element methods. Academic Press Ltd., London, 1992.

² | D. L. Colton and R. Kress. Integral equation methods in scattering theory. Krieger Publishing Company, Malabar, 1992.

³ | I. M. Gelfand and G. E. Schilow. Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

⁴ | M. Köhl and S. Rjasanow. Multifrequency Analysis for the Helmholtz Equation. Preprint 64, 2002. to appear in IABEM 2002 issue of Computational Mechanics, Springer.

⁵ | M. Köhl. A Fourier Transform based scheme for the Helmholtz equation. Preprint 73, Universität des Saarlandes, 2002, submitted.

⁶ | J.-C. Nédélec. Acoustic and electromagnetic equations. Springer-Verlag, New York, 2001.