

# Das Hommsche Auge, ein Testfall für numerische Verfahren

Bernhard Schwarz-Röhr

Carl-von-Ossietzky Universität Oldenburg, [bernhard@aku.physik.uni-oldenburg.de](mailto:bernhard@aku.physik.uni-oldenburg.de)

## Einleitung

Zur Berechnung der Streuung von Schall werden häufig numerische Verfahren eingesetzt, die keine eingebaute Fehlerabschätzung mitliefern. Es liegt nahe, solche Verfahren an analytischen Vergleichslösungen für möglichst nichttriviale Testfälle zu prüfen. Anton Homm schlug als hinreichend interessantes Modell eine Hohlkugel mit dünnen, schallharten Wänden vor, deren Innenraum durch eine Öffnung gemäß Abb. 1 mit dem Aussenraum gekoppelt ist. In diesem Beitrag wird der Lösungsweg für solche Streuprobleme skizziert.

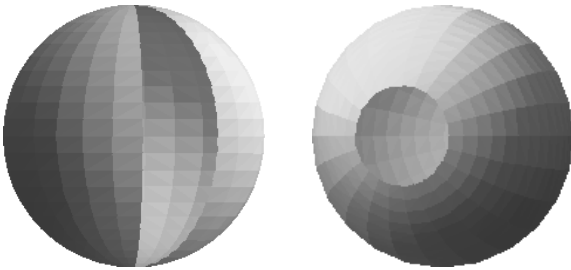


Abbildung 1: das „Hommsche Auge“ in der von Homm vorgeschlagenen Form (links) und das hier behandelte Modell mit höherer Symmetrie (rechts)

## Formulierung des Problems

Eine einlaufene Welle  $p_e$  wird gemäß Abb. 2 an der Kugel mit dem Radius  $r_0$  und dem Öffnungswinkel  $2\delta$  gestreut. Die Streuwelle wird mit  $p_s$ , das Feld im Inneren der Kugel mit  $p_i$  bezeichnet. In Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \phi$  lassen sich die Feldanteile in der üblichen Form (siehe z. B. [1]) als Reihe

$$p_e = \sum_l a_l j_l(kr) P_l(\cos(\vartheta)) \quad (1)$$

$$p_s = \sum_l b_l h_l(kr) P_l(\cos(\vartheta)) \quad (2)$$

$$p_i = \sum_l c_l j_l(kr) P_l(\cos(\vartheta)) \quad (3)$$

schreiben. Hierbei sind  $a_l, b_l, c_l$  Entwicklungskoeffizienten,  $j_l(kr), h_l(kr)$  die sphärischen Bessel- und Hankelfunktionen,  $P_l$  die Legendrepolynome,  $k = \omega/c$  ist die Wellenzahl. Die Rand- und Stetigkeitsbedingungen bei  $r = r_0$  werden mit der Funktion

$$\theta(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{an der Wand} \\ 1 & \text{in der Öffnung} \end{cases}$$

formuliert. Der Druck in der Öffnung muss stetig sein, es gilt also

$$\theta[p_e + p_s] = \theta p_i. \quad (4)$$

Die Normalkomponenten der Innen- und Aussenschnelle sind auf der gesamten Oberfläche gleich, in der Öffnung wegen der Stetigkeit des Feldes, an der Wand, weil beide verschwinden. Diese Bedingungen werden durch die Gleichungen

$$[1 - \theta] p'_i = 0 \quad p'_e + p'_s - p'_i = 0 \quad (5), (6)$$

ausgedrückt. Aus den Gleichungen (4-6) lassen sich Beziehungen für die gesuchten  $b_l$  und  $c_l$  herleiten, das Verfahren dazu wird im fol-

genden am Beispiel der Gleichung (5) erläutert. Zunächst wird die Entwicklung  $\theta = \sum_m \theta_m P_m(\cos(\vartheta))$  eingesetzt:

$$[1 - \theta] p'_i = \sum_l c_l j'_l P_l - \sum_{k,m} c_k j'_k \theta_m P_k P_m. \quad (7)$$

Entwickeln der Produkte  $P_k P_m$  nach Legendrepolynomen gemäß  $P_k P_m = \sum_l \gamma_{kml} P_l$  führt dann auf

$$[1 - \theta] p'_i = \sum_l \left\{ c_l j'_l - \sum_{k,m} \gamma_{kml} \theta_m c_k j'_k \right\} P_l(\cos(\vartheta)) = 0 \quad (8)$$

Gleichung (8) ist nur dann für alle  $\vartheta$  erfüllt, wenn die geschweifte Klammer für jedes  $l$  einzeln verschwindet:

$$c_l j'_l - \sum_{k,m} \gamma_{kml} \theta_m c_k j'_k = 0 \quad l = 0 \dots \infty \quad (9)$$

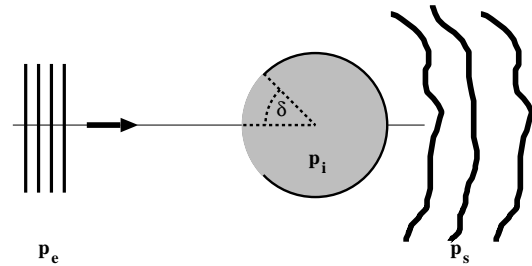


Abbildung 2: Streuung an der Kugel, einlaufende Welle  $p_e$ , gestreute Welle  $p_s$  und Feld im Inneren der Kugel  $p_i$

## Darstellung der speziellen Funktionen

Für  $\theta_m$  ergibt sich aus der Orthogonalität der Legendrepolynome

$$\theta_m = (m + \frac{1}{2}) \int_{180-\delta}^{180} \sin \vartheta d\vartheta P_m(\cos(\vartheta)),$$

mit der in [2] angegebenen Beziehung

$$(2n + 1) P_n(u) = P'_{n+1}(u) - P'_{n-1}(u)$$

folgt hieraus eine Rekursionsgleichung. Ebenfalls wegen der Orthogonalität der Legendrepolynome läßt sich die Berechnung der  $\gamma_{mkl}$  auf die Bestimmung von

$$w_{mkl} = \int du P_m(u) P_k(u) P_l(u),$$

zurückführen. In [3] findet sich dafür die Rekursion

$$w(m, k, l) = \frac{\alpha}{\beta} w(m, k + 1, l - 1),$$

$$\alpha = (m - k + l - 1)(m + k - l + 2) \quad \beta = (m - k + l)(m + k - l + 1).$$

Bei der Anwendung dieser Rekursion ist zu beachten, daß  $\alpha$  und  $\beta$  verschwinden können. Solche Fälle werden vermieden, wenn man mit Hilfe der Rekursion die kleinsten der Zahlen  $m, k, l$  verkleinert und den jeweils mittleren erhöht bis der kleinste Index Null erreicht.

## Abschätzung des Abbruchfehlers der Reihe für $p_e$

Die Abschätzung des Abbruchfehlers beruht auf der Überlegung, daß ein Abbruch der Reihe (1) bei einem gewissen  $l_{max}$  eine exakte Lösung für die abgebrochene Reihe liefert. Der Fehler in der Lösung

resultiert deshalb ausschliesslich aus der unvollständigen Approximation der einlaufenden Welle im Bereich des Streuers. Für  $l_{max}$  wird in der Literatur die Abschätzung

$$k r_0 \ll \sqrt{l_{max}(l_{max} + 1)}.$$

angegeben, Abb. 3 belegt exemplarisch die Gültigkeit dieser Beziehung.

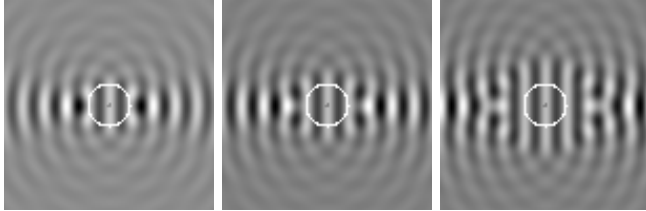


Abbildung 3: Approximation der ebenen Welle (dargestellt ist der Realteil) mit  $k = 6$  für  $l_{max} = 6, 8, 12$ . Mit steigendem  $l_{max}$  vergrößert sich der Bereich, in dem die einlaufende Welle gut approximiert wird. Zum Vergleich ist eine Kugel mit  $r = 1$  eingezeichnet.

### Lösungen für einfache Fälle

Zum Test wurde zunächst die Streuung an der harten Kugel berechnet. In diesem Fall verschwindet die Normalschnelle an der Oberfläche, man erhält sofort die Gleichungen

$$p'_e + p'_s = 0 \quad \rightarrow \quad b_l = -\frac{j'_l(kr_0)}{h'_l(kr_0)} a_l.$$

Die hier eingesetzten Algorithmen reproduzieren die in [1] tabellierten Werte. Zum Test der Beziehungen für  $\gamma_{mkl}$  wurde an der Oberfläche der Kugel eine Randbedingung der Form

$$p_e(\vartheta) + p_s(\vartheta) = Z(\vartheta) [p'_e(\vartheta) + p'_s(\vartheta)]$$

angesetzt, die Kugel also mit einer winkelabhängigen Impedanz belegt. Mit der Entwicklung

$$Z(\vartheta) = \sum_m Z_m P_l(\cos(\vartheta))$$

führt das oben beschriebene Verfahren auf das Gleichungssystem

$$a_l j_l + b_l h_l = \sum_{mk} \gamma_{mkl} Z_m [a_k j'_k + b_k h'_k] \quad (10)$$

Die Abbildungen 4 zeigt eine Beispiellösung dieser Gleichung.

### Behandlung des Hommschen Auges

Ärgerlicherweise zeigt sich, daß das gesamte sich aus den Gleichungen (4-6) ergebende Gleichungssystem keine Lösung hat. Die Ursache liegt in der Modengleichung für den Innenraum (9),

$$[1 - \theta] p'_i = 0 \quad \rightarrow \quad c_l j'_l - \sum_{k=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^{l_{max}} \gamma_{mkl} \theta_m c_k j'_k = 0$$

die bei einem Abbruch bei einem  $l_{max}$  keine von Null verschiedenen Lösungen hat. Ersetzt man in (9)  $c_l j'_l$  durch  $x_l$  erhält man eine nur vom Öffnungswinkel  $\delta$ , nicht aber von  $k$  oder  $r_0$  abhängige Gleichung

$$x_l - \sum_{k=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^{l_{max}} \gamma_{mkl} \theta_m x_k = 0. \quad (12)$$

Der Sprung der Eigenwerte von (12) in Abb. 5 legt die Vermutung nahe, daß die Eigenlösungen für  $n > 23$  die gesuchten, jedoch durch den Abbruch des Gleichungssystems gestörten Lösungen zum Eigenwert 0 sind. Diese Vermutung wird durch die zugehörigen Eigenvektoren in Abb. 5 unterstützt. Eine Erhöhung von  $l_{max}$  führt nicht zu

einer Lösung, dies ist vermutlich auf die den Gibbs'schen „Ohren“ entsprechenden Überschinger der Entwicklung von  $\theta$  in Legendrepolynome zurückzuführen. Wie in Abb. 5 unten dargestellt, werden die Überschinger bei einer Erhöhung von  $l_{max}$  zwar schmaler, die Amplitude des Überschingers bleibt jedoch näherungsweise konstant.

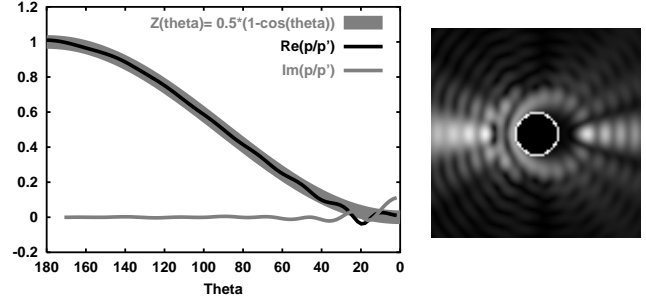


Abbildung 4: Beispiel für eine Kugel mit winkelabhängiger Impedanz gemäß Gl. (10),  $kr_0 = 5$ ,  $l_{max} = 10$ . Links ein Vergleich der Randbedingung  $Z(\vartheta)$  mit dem errechneten  $p/p'$  der Lösung. Bei kleinen Winkeln treten Rundungsfehler bei der Bestimmung von  $p/p'$  auf, da beide Größen gegen Null gehen. Rechts der Betrag des Gesamtfeldes  $|p_e + p_s|$ , an der Oberfläche verschwindet das Feld für  $\vartheta \rightarrow 0$ .

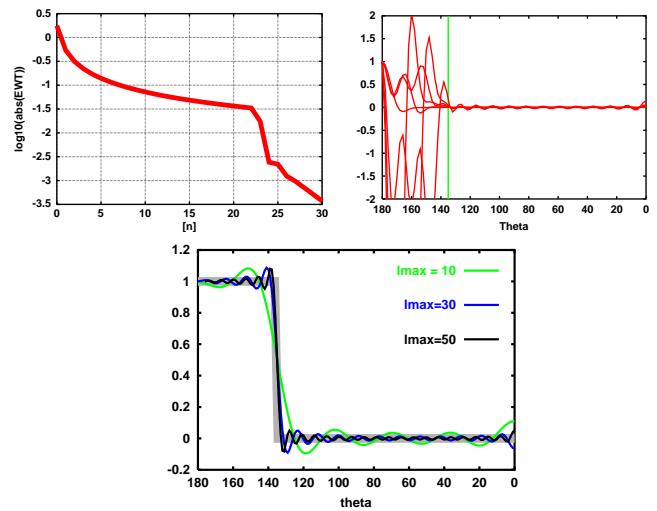


Abbildung 5: Links die Eigenwerte der Gleichung (12) für  $\delta = 45^\circ$  und  $l_{max} = 30$ , rechts die Eigenvektoren für  $n > 23$ . Unten die Entwicklung der Sprungfunktion nach Legendrepolynomen für  $\delta = 45^\circ$  für verschiedene  $l_{max}$ .

### Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein Gleichungssystem für das Hommsche Auge aufgestellt, die dazu notwendigen speziellen Funktionen wurden auf Rekursionsgleichungen zurückgeführt. Es zeigte sich, daß zumindest ein endliches Teilsystem dieser Gleichungen keine Lösungen hat. Das Verhalten der Eigenwerte und Eigenvektoren deutet darauf hin, daß die Schwierigkeiten bei der Lösung mit dem Abbruch des Gleichungssystems zusammenhängen. Es soll deshalb versucht werden, eine Basis für die Lösung im Innenraum durch eine Fehlerminimierungsverfahren – wie etwa bei der Quellsimulationsmethode – zu suchen und an diese Basis eine Lösung im Aussenraum anzuschliessen.

### Literatur

- [1] Morse Ingard, Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, 1968
- [2] Skudrzyk, The Foundations of Acoustics, Springer, 1971
- [3] Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik, BI-Taschenbuch, 1964