

# Simulation inhomogener Rohre mit Segmentketten ohne Querschnittsprünge

Hans Werner Strube

Drittes Physikalisches Institut, Universität Göttingen

## Einleitung

Effiziente Zeitbereichs-Simulationen des Stimmkanals oder anderer inhomogener Rohre mit geringer Dämpfung und relativ harten Wänden basieren meist auf einer eindimensionalen Kette homogener Segmente, an deren Querschnittsprüngen die vor- und rücklaufenden Wellen gestreut werden (Kelly–Lochbaum-Modell [4]). Obwohl diese Darstellung einfach und schnell ist, wurden gelegentlich – meist zur Simulation von Blasinstrumenten – auch Approximationen durch Ketten konischer Segmente mit stetiger Querschnittsfunktion betrachtet [5, 1, 6, 2]. Hier wird eine Diskretisierung, die hinreichend einfach zur Stimmkanal-Simulation ist, untersucht.

## Theoretische Grundlagen

Näherungsannahme: Eindimensionale Ausbreitung ebener Wellen, hartwandiges Rohr, der Übersichtlichkeit halber keine Dämpfung (diese kann approximativ eingebaut werden); Querschnittsfunktion  $A(x)$  (zeitliche Änderung hier vernachlässigt). Dann gilt mit Schalldruck  $p$ , Schallfluss  $q = vA$ , mittlerer Dichte  $\rho_0$ , Schallgeschwindigkeit  $c$  und akustischer Impedanz  $Z = \rho_0 c / A$ :

$$-\partial_x p = (Z/c) \partial_t q, \quad -\partial_x q = (1/Zc) \partial_t p, \quad (1)$$

Statt mit  $p, q$  kann man mit Druckwellengrößen arbeiten:

$$p^\pm = (p \pm Zq)/2, \quad p = p^+ + p^-, \quad q = (p^+ - p^-)/Z. \quad (2)$$

In homogenen Segmenten breiten sich diese streuungsfrei aus; an den Grenzen (Segmentnummern  $n-1$  und  $n$ ) werden sie gestreut:

$$p_{n-1}^- = r_n p_{n-1}^+ + (1 - r_n) p_n^-, \quad (3)$$

$$p_n^+ = -r_n p_n^- + (1 + r_n) p_{n-1}^+, \quad (4)$$

$$r_n = (Z_n - Z_{n-1}) / (Z_n + Z_{n-1}). \quad (5)$$

Für allgemeinere Segmentformen sind „reduzierte“ Feldgrößen vorteilhaft:  $\psi = p/\sqrt{Z}$ ,  $\phi = q\sqrt{Z}$ .

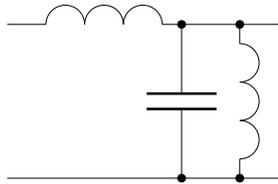
Die Gln. (1) werden mit  $W = Z'/2Z = -\sqrt{A'}/\sqrt{A}$ :

$$-\partial_x \psi = (1/c) \partial_t \phi + W \psi, \quad -\partial_x \phi = (1/c) \partial_t \psi - W \phi. \quad (6)$$

Eine weitere Transformation  $\chi = \phi + Wc \int \psi dt$  macht dies zu

$$-\partial_x \psi = (1/c) \partial_t \chi, \quad -\partial_x \chi = (1/c) \partial_t \psi + Vc \int \psi dt, \quad (7)$$

wobei  $V = W^2 - W' = \sqrt{A''}/\sqrt{A}$ . Aus (7) folgt eine Klein–Gordon-Gleichung für  $\psi$  mit  $V$  als Potential. In elektrischer Analogie ( $\psi =$  Spannung,  $\chi =$  Strom) lässt sich der letzte Term in (7) als Belastung mit Querinduktivitäten deuten, Abbildung 1.



**Abbildung 1: Infinitesimales Leitungselement zu (7).**

Längs- $L =$  Quer- $C = c^{-1} dx$ ,

Quer- $L = 1/(Vc dx)$ .

Die Gleichungen entsprechen formal denen einer Hohlleitermode mit  $c\sqrt{V}$  als Cutoff-Kreisfrequenz. Bei negativer Krümmung  $\sqrt{A''}$  der radizierten Querschnittsfunktion ist aber  $V$  negativ und führt zu einer „tachyonischen“ Dispersionsrelation. – An den Enden der Leitung muss man zwischen  $p, q$  und  $\psi, \chi$  transformieren.

Wenn  $V = \text{const}$ , liegt formal eine homogene Leitung vor, bei  $V = 0$  ohne Querinduktivitäten. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\sqrt{A}$  eine lineare Funktion von  $x$ , das Rohr also konisch ist. Wo zwei konische Segmente stetig, aber mit verschiedener Steigung aneinander

grenzen, wird  $\chi$  unstetig und  $V$  eine Deltafunktion. Dies bedeutet im elektrischen Bild eine diskrete Querinduktivität  $1/\Delta Wc$ , wo  $\Delta W$  die Änderung von  $W$  ist. Eine Konuskette wird also eine homogene Leitung mit  $Z = 1$ , die an den Segmentgrenzen induktive Shunts aufweist (vgl. [1, 8]). Wo diese negativ sind, können lokal Instabilitäten auftreten, die sich aber im Gesamtsystem kompensieren sollten. Die Streugleichungen zwischen Konussegmenten  $n-1$  und  $n$  sind (mit Fläche an der Grenze  $A_n$ , Segmentlängen  $D_n$  und Wellengrößen  $\psi^\pm = (\psi \pm \chi)/2$ , im Laplace-Frequenzbereich):

$$\psi_{n-1}^- = R_n(s) \psi_{n-1}^+ + (1 + R_n(s)) \psi_n^-, \quad (8)$$

$$\psi_n^+ = R_n(s) \psi_n^- + (1 + R_n(s)) \psi_{n-1}^+; \quad (9)$$

$$R_n(s) = -\tau_n^{-1} / (\tau_n^{-1} + s), \quad (10)$$

$$\tau_n^{-1} = \frac{c}{2} \left( \frac{\sqrt{A_{n+1}/A_n} - 1}{D_n} + \frac{\sqrt{A_{n-1}/A_n} - 1}{D_{n-1}} \right). \quad (11)$$

( $\tau_n$  ist die doppelte Querinduktivität.)

Vertauschung  $A \leftrightarrow A^{-1}$ ,  $W \leftrightarrow -W$ ,  $\psi \leftrightarrow \phi$  liefert auch Lösungen für hyperbolische Segmente.

## Zeitdiskretisierung, Stabilität

Für Zylindersegmente der Länge  $D$  lassen sich die Streugleichungen (3), (4) direkt diskretisieren, wenn die Abtastfrequenz  $f_s = Nc/2D$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) ist. Für konische Segmente (8), (9) muss dagegen noch  $R_n(s)$  durch ein digitales Filter dargestellt werden. Dieses ist ein rekursives System 1. Ordnung mit exponentiell abklingender oder anwachsender Impulsantwort. Wir verwenden die bilineare  $z$ -Transformation oder (äquivalent) eine Wellendigitalfilter-Realisierung [3, 8] der Querinduktivität an einem 3-Tor-Paralleladaptor mit zwei Torimpedanzen  $= 1$  (an Leitung) und einer  $= f_s \tau_n$  (an Induktivität). Ist  $k$  der Zeitindex und  $s_{n,k}$  der Zustand der Induktivität, so lauten die Streugleichungen (bei  $f_s = c/D$ ):

$$\psi_{n-1,k}^- = r_n \psi_{n-1,k-1}^+ + (1 + r_n) \psi_{n,k-1}^- + 2r_n s_{n,k-1}, \quad (12)$$

$$\psi_{n,k}^+ = r_n \psi_{n,k-1}^- + (1 + r_n) \psi_{n-1,k-1}^+ + 2r_n s_{n,k-1}, \quad (13)$$

$$s_{n,k} = (1 + r_n)(\psi_{n-1,k-1}^+ + \psi_{n,k-1}^-) + (1 + 2r_n) s_{n,k-1}; \quad (14)$$

$$r_n = -\tau_n^{-1} / (\tau_n^{-1} + 2f_s) \quad [\tau_n \text{ siehe (11)}]. \quad (15)$$

In der Segmentkette kommen immer negative Induktivitäten vor. Dass trotzdem die Stabilität erhalten bleibt, lässt sich wie folgt zeigen. Jedes konische Segment, dessen Länge o.B.d.A. minimal sei ( $D = c/2f_s$ ), wird zwischen zwei (notfalls infinitesimalen) Zylindersegmenten eingebettet. Die Streumatrixelemente eines solchen Konus (Querschnittsübergang  $A_1 \rightarrow A_2$ ) haben im zeitkontinuierlichen Fall den gemeinsamen Nenner

$$(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) - \exp(-s\tau), \quad (16)$$

$\tau = -\tau_2 - \tau_1 = 2D/c = 1/f_s$ ,  $\tau_2/\tau_1 = -\sqrt{A_2/A_1}$ . Im zeitdiskreten Fall wird der Laufzeitterm  $\exp(-s\tau)$  direkt zu  $z^{-1}$ ; der erste, von den Querinduktivitäten herrührende Term wird dagegen bilinear transformiert:  $s = 2f_s(z-1)/(z+1)$ . Wir können also weiter  $s$  benutzen, aber den Laufzeitterm als  $z^{-1} = (2f_s - s)/(2f_s + s)$  schreiben. Sei  $s\tau = a + ib$ ,  $a, b$  reell. An einer Nullstelle von (16) gilt für den Imaginärteil von (16) im zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten Fall:

$$1 + 2a\tau_1\tau_2/\tau^2 = \begin{cases} e^{-a}(\sin b)/b, & \text{kontin.,} \\ 4/((2+a)^2 + b^2), & \text{diskret.} \end{cases} \quad (17)$$

Hieraus folgt  $a < 0$ , d. h. die Pole der Streumatrix liegen in der linken Halbebene, so dass Stabilität herrscht. (Der zeitkontinuierliche Fall

wurde schon in [2] hergeleitet.) In den Zuständen der Induktivitäten können aber große Werte auftreten, und es kommen kleine Differenzen großer Zahlen vor. Daher wird das System durch Rechenungenauigkeiten nach längerer Zeit doch instabil, wie in [8]. Als Abhilfe kann man zu allen  $r_n$  eine kleine negative Konstante addieren.

### Vergleich der Rohrmodelle

Bei gleicher Segmentzahl haben die Konusketten eine höhere Filterordnung als die Zylinderketten, da jede Streustelle eine Zustandsgröße benötigt. Dadurch ist die Übertragungsfunktion auch bei reeller Abschlussimpedanz nicht mehr symmetrisch um  $c/4D$ . Die Zahl der freien Parameter ist aber bei beiden Modellen gleich und entspricht der Zahl der Formantfrequenzen und -bandbreiten im Frequenzbereich bis  $c/4D$ , so dass oberhalb hiervon der Verlauf nicht unabhängig sein kann. Als Abtastfrequenz sollte man  $c/D$  wählen, aber nur den Bereich bis  $c/4D$  wirklich nutzen, da sonst die Quereinduktivitäten zu ungenau „bilinear“ dargestellt werden. Zum Vergleich der Fluss-Übertragungsfunktionen (schallharte Quelle; Strahlungsimpedanz: Widerstand parallel Induktivität) wurde das erste und letzte Segment der Konuskette zylindrisch mit Länge  $D/2$  gewählt, um die Streustellen der Konuskette den Segmentmitten der Zylinderkette zuzuordnen. Die Übertragungsfunktionen wurden im Frequenzbereich mittels Kettenmatrizen berechnet. Verglichen wurden: Zylinderkette, Konuskette mit exakten Induktivitäten, Konuskette mit „bilinearen“ Induktivitäten; Frequenz bis  $f_s/2 = c/2D$ .

Als Vorlage dienten Vokale [a], [i], [u] nach [7] mit Abtastintervall 0,396 cm, auch mit Glättung von  $\sqrt{A}$  über je 5 Segmente. Die Rohre wurden entweder punktweise oder mittellnd abgetastet (z. B. alle 4 Segmente). Im letzteren Fall wurden die Zylinderketten durch Intervallmittelwerte (bzgl.  $\sqrt{A}$ ) und die Konusketten durch Streckenzuganpassung an  $\sqrt{A}$  ermittelt. Eine Zylinderkette bei voller Auflösung definierte die „exakte“ Übertragungsfunktion, die mit den abgetasteten Modellen verglichen wurde. Bei geglätteten Rohren als Vorlage war die Konuskette meist etwas genauer, besonders bei mittellnder Abtastung, was aber (vokalabhängig) nicht für jeden Formanten zutraf. Bei uneglätteten Querschnitten zeigte sich kein klarer Vorteil, da die unterabgetastete Feinstruktur zu „zufällige“ Abtastwerte liefert. Bei geglätteten Rohren stellt die Konuskette auch Formanten oberhalb  $c/4D$  oft noch leidlich dar. Die Differenz zwischen der zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Übertragungsfunktion der Konuskette ist unterhalb  $c/4D$  sehr gering. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für [a] (geglättet, mittellnd abgetastet).

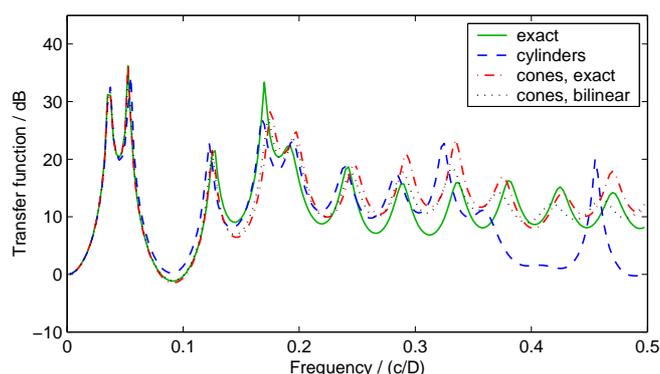


Abbildung 2: Übertragungsfunktionen eines [a].

Wenn man von einer exakten Konuskette als Modell ausgeht, kann man vergleichen, ob die zeitdiskrete Konuskette weniger Aufwand als eine – evtl. feiner segmentierte – Zylinderkette erfordert. Dies ist tatsächlich so, wenn man die Koni durch zwei halblange Zylinder ersetzt, die bei  $1/4$  und  $3/4$  zwischen den  $\sqrt{A}$  an den Koni-Segmentgrenzen linear interpoliert werden, Abbildung 3. Das erste und letzte Koni-Segment war wieder zylindrisch und halblang. In diesem Fall sind die zeitdiskreten Übertragungsfunktionen erstaunlicherweise fast identisch, was sich auch theoretisch für  $A_n/A_{n-1} \approx 1$  zeigen lässt; es besteht aber eine leichte Abweichung zur Übertra-

gungsfunktion der zeitkontinuierlichen Konuskette. Auch bei unabhängiger mittellnder Anpassung einer Koni- und einer Zylinderkette, wobei letztere halb so lange Segmente hat wie die erstere, sind die Übertragungsfunktionen noch sehr ähnlich.

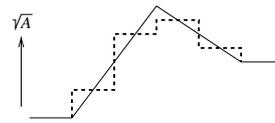


Abbildung 3: Vergleich Konuskette mit Zylinderkette halber Segmentlänge (Prinzip).

Statt  $R_n(s)$  aus (10) bilinear auf diskrete Zeit zu transformieren, könnte man z. B. ein impulsinvariantes Design zugrunde legen oder auch die Martınez-Methode [6]; deren Gl. (21) mit linearer Interpolation des Eingangssignals entspricht [mit  $z_n = \exp(-1/f_s \tau_n)$ ]

$$R_n(z) = -[(1/f_s \tau_n) - (1 - z_n)(1 - z^{-1})]/(1 - z_n z^{-1}). \quad (18)$$

Dabei ist die Abweichung von der idealen Übertragungsfunktion aber meist größer, vor allem bei tiefen Frequenzen, Abbildung 4. Außerdem wäre die Stabilität noch zu zeigen.

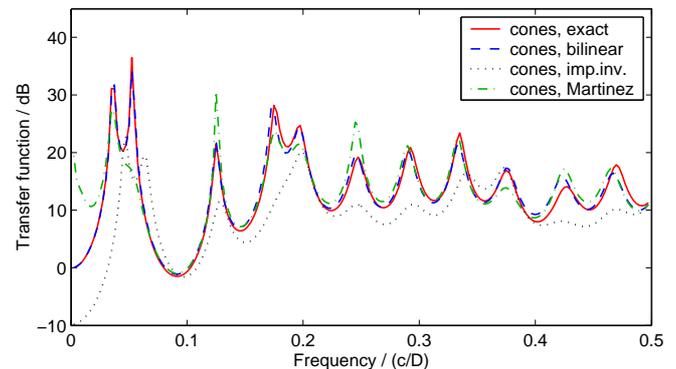


Abbildung 4: Vergleich von Zeitdiskretisierungsmethoden.

### Folgerungen

Eine effiziente Zeitbereichs-Approximation inhomogener Rohre mittels Wellengrößen in konischen statt zylindrischen Segmenten ist möglich. Zeitableitungen werden bilinear oder als WDF diskretisiert. Trotz lokal instabiler Filter ist dann die zeitdiskrete Konuskette theoretisch stabil. Rechenungenauigkeiten führen irgendwann doch zu Instabilität, die sich durch kleine Zusatzterme unterdrücken lässt. Ein klarer Vorteil gegenüber Zylindersegmenten zeigt sich aber nur, wenn wirklich längere annähernd konische Abschnitte vorkommen oder die Querschnittsfunktion recht glatt ist. Auch sind Zylinderketten halber Segmentlänge bei gleichem  $f_s$  etwa gleich gut. Zeitvarianter Rohre wurden nicht untersucht; sie könnten kritischer sein.

- [1] A.H. Benade: Equivalent circuits for conical waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1764–1769 (1988)
- [2] E. Ducasse: An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores. *J. Acoust. Soc. Am.* **112**, 3031–3041 (2002)
- [3] A. Fettweis: Wave digital filters: theory and practice. *Proc. IEEE* **74**, 270–327 (1986)
- [4] J.L. Kelly, C.C. Lochbaum: Speech synthesis. *Proc. Forth Int. Congr. Acoust.*, Paper G42, 1–4 (1962)
- [5] M. Kob: *Physical Modeling of the Singing Voice* (Dissertation, TH Aachen), Berlin: Logos, 2002
- [6] J. Martínez, J. Agullo, S. Cardona: Conical bores. Part II. Multiconvolution. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1620–1672 (1988)
- [7] B.H. Story, I.R. Titze, E.A. Hoffman: Vocal tract area functions from magnetic resonance imaging. *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 537–554 (1996)
- [8] M. van Walstijn, M. Campbell: Discrete-time modeling of woodwind instrument bores using wave variables. *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, 575–585 (2003)