

Simulation von Ultraschallausbreitung in kavitierenden Flüssigkeiten

N. Bretz^{1,2}, M. Kaltenbacher², M. Staudacher¹, R. Lerch²

¹ Robert Bosch GmbH, Stuttgart, Deutschland, Email: Nina.Bretz@de.bosch.com

² Lehrstuhl für Sensorik, Universität Erlangen-Nürnberg, Deutschland, Email: Nina.Bretz@lse.eei.uni-erlangen.de

Einleitung

Hochleistungsschall spielt heutzutage eine wichtige Rolle in medizinischen und industriellen Anwendungen, so auch in der Reinigungstechnik für präzisionsgefertigte Bauteile. Die steigenden Reinigungsanforderungen an solche Bauteile erfordern eine sorgfältige Auslegung der Ultraschallreinigungsanlagen. Der hauptsächliche Reinigungseffekt wird dabei durch die vom hochintensiven Schallfeld induzierte Kavitation erzielt. Um ein besseres Verständnis der komplexen Wechselwirkung zwischen Kavitation und Schallfeld zu erhalten und damit die Auslegung der Reinigungsbäder optimieren zu können, gewinnt neben Experimenten die numerische Simulation dieses Vorganges zunehmend an Bedeutung. In dieser Arbeit wird ein Simulationsprogramm basierend auf der Finiten Elemente Methode (FEM) zur Berechnung von Ultraschallwellen in kavitierenden Medien vorgestellt.

Mathematisches Modell

Durch die Schalleinstrahlung entstehen Kavitationsblasen und bilden mit der umgebenden Flüssigkeit ein Gemisch, welches durch ein kontinuierliches Zwei-Phasen-Modell beschrieben werden kann [1]. Voraussetzung ist, dass die Blasen und ihre Abstände voneinander kleiner sind als die räumlichen Änderungen der Schallausbreitung und dass die Relativbewegung der Phasen vernachlässigbar ist. Weiter wird angenommen, dass es nicht zu Interaktionen der Blasen kommt, d.h. dass die Blasenanzahl n pro Volumen entsprechend gering ist. Mit dem Blasenradius $R(\mathbf{x}, t)$ ergibt sich der Blasenvolumenanteil zu

$$\beta(\mathbf{x}, t) = \frac{4}{3}\pi R^3(\mathbf{x}, t) n. \quad (1)$$

Dabei gibt $R(\mathbf{x}, t)$ einen gemittelten Blasenradius in der Umgebung des Punktes \mathbf{x} an. n wird als konstant angenommen. Die Dichte ρ des Flüssigkeits-Blasen-Gemisches kann mit Hilfe des Blasenvolumenanteiles $\beta(\mathbf{x}, t)$ ausgedrückt werden als

$$\rho = (1 - \beta) \rho_l + \beta \rho_g. \quad (2)$$

Die Indizes beziehen sich in obiger Gleichung wie auch im folgenden jeweils auf die entsprechende flüssige (liquid) oder gasförmige Phase. Unter der Annahme, dass $\rho_g \ll \rho_l$ und $\beta \ll 1$ gilt, kann folgende Vereinfachung gemacht werden

$$\rho \simeq (1 - \beta) \rho_l. \quad (3)$$

Setzt man die Gleichungen 1 und 3 in die Massenerhaltungsgleichung des Gemisches ein, so läßt sich folgen-

de Erhaltungsgleichung für den Druck des Flüssigkeit-Blasen-Gemisches herleiten (siehe [2])

$$\frac{1}{\rho_l c_l^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \beta}{\partial t}. \quad (4)$$

Hier bezeichnet \mathbf{u} die Geschwindigkeit des Gemisches und c_l die Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Ähnlich verfährt man mit der Impulserhaltungsgleichung

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (5)$$

Eliminiert man nun \mathbf{u} in den Gleichungen 4 und 5, während man ρ_l und c_l als konstant annimmt, ergibt sich die linearisierte Gleichung

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \rho_l \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Das Einsetzen von β (Gl. 1) in die obige Gleichung führt zu unserer Modellgleichung für die Ausbreitung von Schallwellen in kavitierenden Flüssigkeiten

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{4}{3} \pi \rho_l n \left[6R\dot{R}^2 + 3R^2\ddot{R} \right]. \quad (7)$$

Das Modell wird mathematisch durch eine Gleichung zur Beschreibung der radialen Blasendynamik in Abhängigkeit vom Wechseldruck des Gemisches abgeschlossen. Anders als in den meisten Modellen, die auf [1] beruhen, wird hierfür die nichtlineare Gilmore-Gleichung [3] verwendet. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung stellt eine Erweiterung der sonst üblichen Gleichungen dar, indem sie die Dichteabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit sowie Überschallgeschwindigkeiten der Blasenwand berücksichtigt und somit auch die Stoßwellenentwicklung beim Blasen kollaps abbildet. Sie wurde auch im Hinblick auf die Kompatibilität zu einer später geplanten Erweiterung des Modells für die Schallausbreitung gewählt.

Numerische Implementierung

Die numerische Umsetzung erfolgt auf Seiten der Schallfeldberechnung durch eine eigenentwickelte FEM-Software. Die erweiterte Wellengleichung wird im Zeitbereich gelöst. Die iterative Kopplung zur Blasendynamik erfolgt über Wechseldruck und Blasenradius. Die Gilmore-Gleichung wird mit Hilfe eines eingebetteten Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahrens 4./5. Ordnung für jedes finite Element separat gelöst. Bei der Simulation der sich bildenden Stehwellen in Reinigungsbädern muss die Einschwingphase mitberücksichtigt werden.

Dies ist in der vollständig transienten Berechnung sehr zeitaufwändig. Eine zweiphasige Simulation kann die Rechenzeit reduzieren. Zunächst erfolgt eine harmonische Simulation des eingeschwingenen Zustandes ohne Berücksichtigung der Blasen. Diese Ergebnisse verwendet man als Anfangsbedingungen für die anschließende transiente Berechnung mit Kopplung an die Blasendynamik.

Simulationsergebnisse

Zunächst wurde die Schallausbreitung in einem eindimensionalen Kanal simuliert. Durch die geringe Höhe des Kanals breitet sich nur eine ebene Stehwelle aus. In Abb. 1 ist das Simulationsmodell dargestellt. Auf der linken Seite wird eine Druckerregung mit einer Amplitude von $0.9 \cdot 10^5$ Pa und einer Frequenz von 27 kHz vorgegeben. Die Simulation wurde zunächst transient durchgeführt.

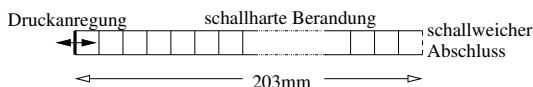


Abbildung 1: Simulationsgeometrie des eindimensionalen Kanals.

Im oberen Teil von Abb. 2 ist der Druck nach dem Einschwingvorgang abgebildet. Es zeigt sich deutlich das Muster der ebenen Welle. Im unteren Teil von Abb. 2 ist der Blasenvolumenanteil aufgetragen. Das größte Blasenvolumen zeigt sich in den Druckminima. In Abb. 3 ist das

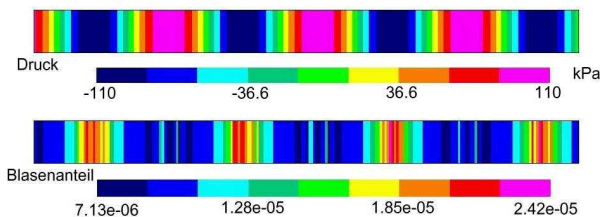


Abbildung 2: Eingeschwungener Zustand zum Zeitpunkt der maximalen Anregung; Oben: Druck, Unten: Blasenvolumenanteil im Kanal.

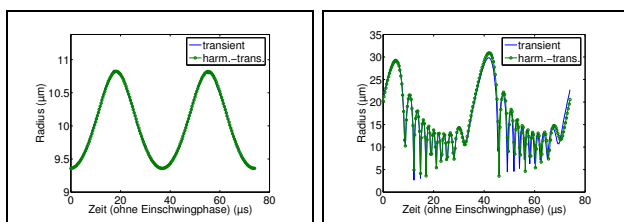


Abbildung 3: Blasenverhalten im Kanal; Links: $R(t)$ im Druckknoten, Rechts: $R(t)$ im Druckbauch.

Radius-Zeit-Verhalten in der Nähe des vorletzten Druckknotens und des letzten Druckbauchs vor der Grenzfläche zur Luft dargestellt. Zusätzlich sind die Ergebnisse der harmonisch-transienten Simulation mit aufgetragen. Man sieht einerseits, dass die Blasen im Bauch heftig kollabieren, während sie im Knoten nur sinusförmig schwingen. Andererseits stimmen die beiden Verfahren

gut überein. Die Rechenzeit des harmonisch-transienten Verfahrens beträgt zwei Minuten gegenüber ca. zehn Stunden, die das transiente benötigt. Daher wurde die Simulation der rotationssymmetrischen Stehwellen, die sich in dem in Abb. 4 dargestellten Zylinder bilden, aus Rechenzeitgründen nur harmonisch-transient durchgeführt. Die Anregungsamplitude betrug hier $0.4 \cdot 10^5$ Pa bei ei-

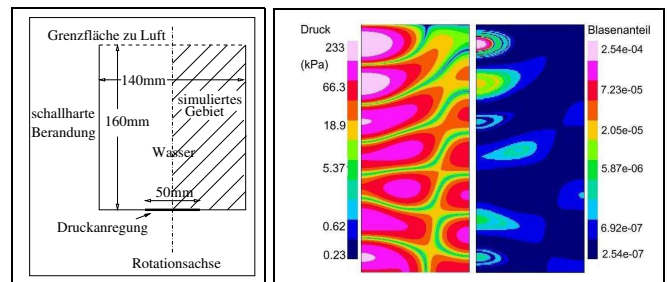


Abbildung 4: Bild a: Simulationsgeometrie des rotationsymmetrischen Zylinders. Bild b: Links: Logarithmische Druckverteilung, Rechts: Logarithmischer Blasenvolumenanteil.

ner Frequenz von 34 kHz. Bild 4b) zeigt den Druckverlauf fünf Perioden nach Start der transienten Rechnung sowie den Blasenvolumenanteil. Ähnlich dem eindimensionalen Fall schwingen die Blasen in den Druckbäuchen weiter auf und kollabieren, während sie in den Knoten nur annähernd sinusförmig schwingen.

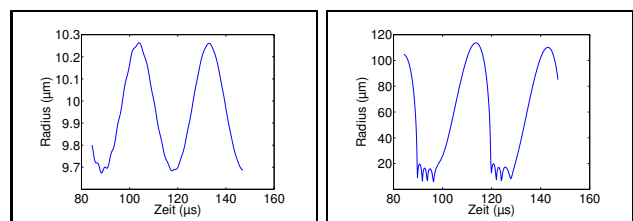


Abbildung 5: Radius-Zeit-Verhalten im Zylinder; Links: im zweitobersten Druckknoten, Rechts: im obersten Druckbauch.

Zusammenfassung

Das Simulationsmodell liefert plausible Ergebnisse sowohl für die Schallausbreitung als auch für die Dynamik der Kavitationsblasen. Ein nächster Schritt ist die Validierung des Modells anhand von Experimenten. Die Kombination von harmonischer und transienter Rechnung liefert deutliche Einsparungen bezüglich der Rechenzeit.

Literatur

- [1] R.E. Calfish et al., Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech.* **153** (1985), 259-273
- [2] K.W. Commander et al., Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments. *JASA* **85** (1989), 732-746
- [3] O.A.Sapozhnikov et al., Effect of overpressure and pulse repetition frequency on cavitation in shock wave lithotripsy. *JASA* **112** (2002), 1183-1195