

Simulationen zur asphärischen Blasendynamik

Karsten Köhler¹, Robert Mettin und Werner Lauterborn

Drittes Physikalisches Institut, 37073 Göttingen, Deutschland, ¹Email: koehler@dpi.physik.uni-goettingen.de

Einleitung

Es werden numerische Untersuchungen zur Dynamik von Kavitationsblasen in Flüssigkeiten vorgestellt. Im Mittelpunkt steht dabei eine asphärische Blasendynamik, wie sie zum Beispiel beim Kollaps einer Blase in der Nähe einer Grenzfläche auftritt. Dabei wird die zu Beginn sphärische Blase beim Kollaps deformiert und es kann zur Bildung eines Jets kommen, der die Blase durchstößt. Weitere Beispiele für asphärische Blasendynamik sind die Bewegung von mehreren in einer Flüssigkeit benachbarten Blasen sowie die Dynamik von elongierten Blasen. Diese dienen als Modell für Blasen, wie sie bei der optischen Kavitation mit Femtosekundenpulsen entstehen.

Um die Bewegung von Blasen in der Flüssigkeit berechnen zu können, muss ein Strömungsproblem mit freien Grenzflächen gelöst werden. Ein dazu geeignetes Verfahren stellt die Randintegralmethode dar. Ihre Anwendung auf den Kollaps einer Kavitationsblase vor einer Wand wird unter anderem von Blake et al. [1, 2] beschrieben. Die Vorgehensweise bei der Simulation wird im Folgenden diskutiert und einige Ergebnisse bei Anwendung auf die genannten Beispiele für asphärische Blasendynamik vorgestellt.

Theoretische Grundlagen

Bei den folgenden Berechnungen wird die Flüssigkeit, in der sich die Blase befindet, als inkompressibel, wirbel- und reibungsfrei angesehen. Daraus ergibt sich, dass das Geschwindigkeitspotential ϕ die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0 \quad (1)$$

erfüllt. Deren Lösung liefert bei gegebenen Randbedingungen die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$.

Die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit liefert die zeitabhängige Bernoulligleichung

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 = p \quad , \quad (2)$$

in die bereits für $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ und für alle Zeiten t die Randbedingungen

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad \phi \rightarrow 0 \quad (3)$$

eingesetzt wurden.

Für die Zeitentwicklung eines Punktes sowie seines Potentials erhält man durch Einsetzen von Gleichung (2) für die bei der Differentiation auftretende partielle Ableitung $\partial\phi/\partial t$ die Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{y}), \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \quad (4)$$

Um die Bewegung einer Blase zu berechnen, werden die beiden folgenden Schritte wechselweise ausgeführt:

- Bei bekanntem Verlauf des Blasenrandes sowie des Geschwindigkeitspotentials auf diesem, wird durch Lösung der Laplace-Gleichung (1) die Geschwindigkeit auf dem Rand bestimmt.
- Mit dieser kann die zeitliche Entwicklung der Koordinaten des Randes sowie dessen Potentials durch die Gleichungen (4) berechnet werden.

Die Lösung der Laplace-Gleichung erfolgt unter Verwendung der Randintegralgleichung

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) dS(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \cdot \begin{cases} 2\pi & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 4\pi & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

Dabei bezeichnet $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Greensche Funktion des Laplace-Operators, Ω das Gebiet, in dem die Laplace-Gleichung gelten soll, und $S = \partial\Omega$ dessen Rand. Der Vektor \mathbf{n} , der die Normalenrichtung des Randes angibt, soll dabei stets aus dem Gebiet Ω herauszeigen. Bei bekanntem ϕ auf dem Rand stellt Gleichung (5) bezüglich der unbekanntenen Größe $\partial\phi/\partial n$ eine Integralgleichung vom Fredholmschen Typ 1. Art dar. Um diese Integralgleichung numerisch zu lösen, wird der Rand S unter Verwendung von Zylinderkoordinaten diskretisiert. Mit Hilfe der Kollokationsmethode [3] und durch Einsetzen einer geeigneten Interpolation des Randes sowie seines Potentials und dessen Normalenableitung aus den Kollokationspunkten erhält man ein lineares Gleichungssystem, das mit Standardverfahren gelöst werden kann.

Ergebnisse

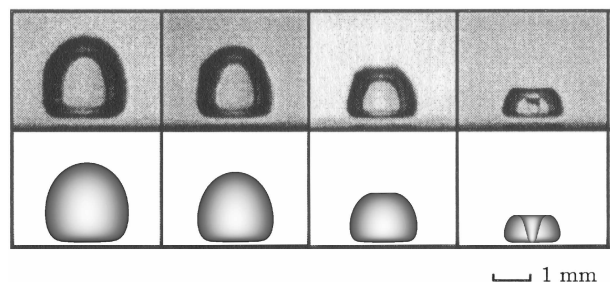


Abbildung 1: Vergleich von experimentell [4] und theoretisch bestimmter Kollapsdynamik für einen Blasen-kollaps vor einer Wand im normierten Abstand $\gamma = 0.9$, Zeitintervall $\Delta t = 17.7 \mu s$.

Als erstes Beispiel für eine asphärische Blasendynamik wird der Kollaps einer Blase in der Nähe einer harten

Grenzfläche vorgestellt. In Abbildung 1 werden experimentelle Ergebnisse (obere Zeile) mit berechneten Blasenformen (untere Zeile) verglichen. Die Aufnahmen zeigen den Kollaps einer durch optische Kavitation mit einem ns-Laserpuls erzeugten Blase im normierten Abstand $\gamma = 0.9$ vor einer harten Wand, wobei sich γ als Quotient aus dem Abstand von Blasenmittelpunkt und Wand sowie dem Maximalradius der Blase ergibt. Man erkennt, dass die Blase an der der Grenzfläche abgewandten Seite deformiert wird, aus der Einstülpung bildet sich ein Jet, der die gegenüberliegende Blasenwand durchstößt. Die numerischen Berechnungen wurden mit einer zunächst sphärischen Blase mit kleinem Anfangsradius gestartet, die aufgrund einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit bis zu ihrem Maximalradius aufschwingt und dann aufgrund des zu vernachlässigenden Innendrucks kollabiert. Der Vergleich von experimentellen und simulierten Daten zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Blasenformen zu den betrachteten Zeitpunkten.

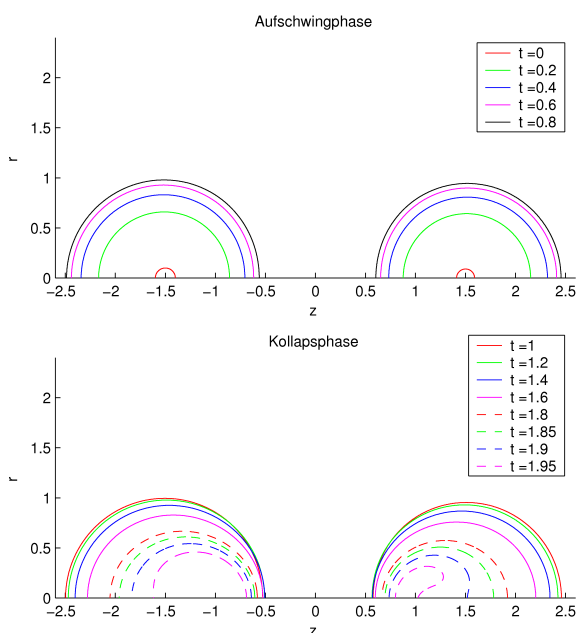


Abbildung 2: Die Dynamik von zwei benachbarten Blasen mit unterschiedlicher Anfangsgröße, $R_0^{(l)} = 0.1$, $R_0^{(r)} = 0.09$.

Abbildung 2 zeigt das Aufschwing- und Kollapsverhalten zweier benachbarter Blasen. Beide Blasen werden mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit gestartet, der Radius der rechten Blase ist aber 10% kleiner gewählt. Man erkennt, dass der Unterschied in der Anfangsgröße einen recht starken Einfluss auf die Kollapsdynamik hat. So sieht man, dass sich zum Ende des Kollapses – im Gegensatz zur linken Blase – bei der rechten Blase schon deutlich ein Jet gebildet hat. Dieses Verhalten deckt sich mit den Beobachtungen von Blake [5].

Zur Untersuchung von elongierten Blasen, wie sie bei der optischen Kavitation mit fs-Laserpulsen auftreten, wurde weiterhin die Dynamik von Blasen untersucht, die zunächst die Form eines Rotationsellipsoides besitzen. In Abbildung 3 erkennt man, dass die Blasen im Kollaps

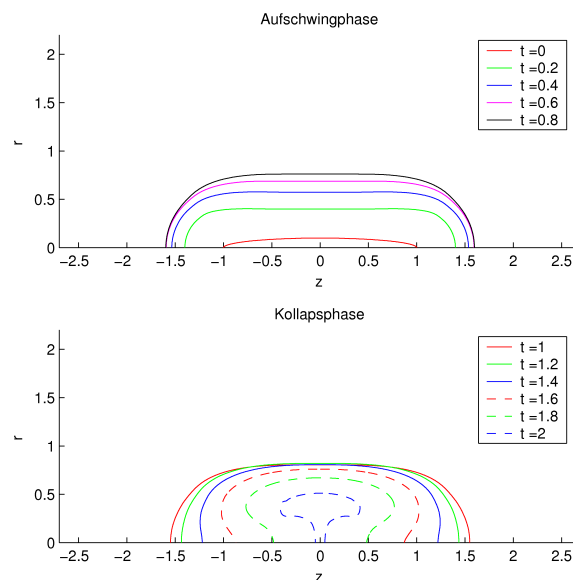


Abbildung 3: Die Dynamik einer ellipsoidförmigen Blase mit Halbachsenverhältnis 1:10, der Innendruck der Blase beträgt zum Start $p = 50$.

zunächst entlang ihrer Längsachse schrumpfen und sich im weiteren Verlauf an den Schnittpunkten mit der z -Achse Einstülpungen bilden. Dies steht im Einklang mit beobachteten Blasen [6], allerdings zeigen sich auch Unterschiede. So schwingen fs-Laserblasen im Experiment in z -Richtung im Gegensatz zu den Ergebnissen aus der Simulation fast gar nicht auf.

Zusammenfassung und Ausblick

Verschiedene Beispiele der Anwendung der Blasendynamiksimulation auf Grundlage der Randintegralmethode wurden vorgestellt. Dabei zeigt sich, dass diese Methode für die Simulation einer Vielzahl von Konfigurationen sehr gut geeignet ist. Neben den diskutierten Beispielen sind viele weitere Untersuchungen von Blasen in anderen geometrischen Anordnungen möglich. Ferner sind einige Erweiterungen der Simulation denkbar, zum Beispiel die Berechnung von Blasen mit akustischer Anregung.

Literatur

- [1] B. B. Taib, G. Doherty, J. R. Blake, Mathematical Programming and Numerical Analysis Workshop, Canberra (1984), 166-186
- [2] J. R. Blake, B. B. Taib, G. Doherty, J. Fluid Mech. **170** (1986), 479-497
- [3] Methode der Randelemente in Statik und Dynamik. vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1997)
- [4] A. Philipp, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1995)
- [5] J. R. Blake, P. B. Robinson, A. Shima, Y. Tomita, J. Fluid Mech. **255** (1993), 707-721
- [6] R. Geisler, Dissertation, Universität Göttingen (2003)