

Tonerzeugung in Flöten - Dreidimensionale Simulation mit der Lattice-Boltzmann-Methode

Helmut Kühnelt¹

¹ Universität für Musik und darstellende Kunst Wien, 1010 Wien, Österreich, Email: kuehnelt@mdw.ac.at

Einleitung

In Quer-, Blockflöten und labialen Orgelpfeifen wird der Ton durch die Wechselwirkung von Luftstrahl und Schallfeld im Instrument erzeugt. Die Lattice-Boltzmann-Methode (LBM) [1] wird dazu verwendet, die Klangerzeugung in dreidimensionalen Simulationen realistischer Geometrien zu simulieren. Mit Hilfe der Simulationsdaten wird der strömungsakustische Kopplungsmechanismus untersucht.

Die Lattice-Boltzmann-Methode (LBM)

Die LBM ist ein mesoskopisches Verfahren zur Strömungssimulation. Es basiert auf einer Diskretisierung der Boltzmann-Gleichung in Geschwindigkeits- und Ortsraum und in der Zeit. Auf jedem Knoten eines räumlichen kubischen Gitters mit uniformem Gitterabstand Δx befinden sich mesoskopische Teilchendichten f_i , die Geschwindigkeiten \mathbf{c}_i besitzen. Die makroskopischen Größen Dichte ρ und Impulsdichte $\rho \mathbf{u}$ an einem Knoten sind

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i. \quad (1)$$

Zu jedem Zeitschritt Δt werden die f_i mit einer Zeitkonstanten τ gegen ein lokales Gleichgewicht $f_i^{(eq)}$ relaxiert. Danach werden die neuen f_i zu den Nachbarknoten transportiert:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(eq)}(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

Dieser Algorithmus (Gl. 2), bestehend aus lokaler Relaxation und linearer Translation, ist effizient parallelisierbar.

Bei hinreichend kleinem Gitterabstand Δx und großem Gesamtsystem approximiert die LBM die isothermen Navier-Stokes-Gleichungen bei niederen Mach-Zahlen. Die Viskosität wird dabei durch τ bestimmt. Für die nachfolgenden Simulationen wurde eine LBM mit multiplen Relaxationszeiten [2] verwendet, bei der die kinematische Viskosität ν und die Volumensviskosität ζ getrennt einstellbar sind, und die sich durch verbesserte Stabilität auszeichnet.

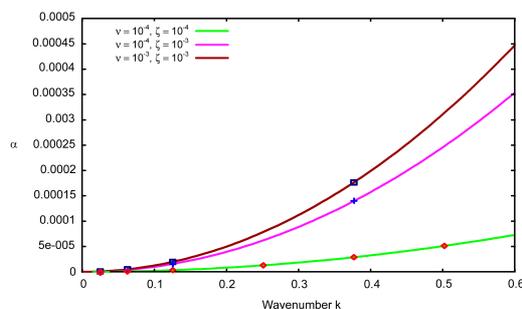


Abbildung 1: Abschwächungskoeffizient α ebener Schallwellen bei verschiedenen Wellenzahlen k und Viskositäten. Theorie (—) und Simulation ($\square, +, \diamond$)

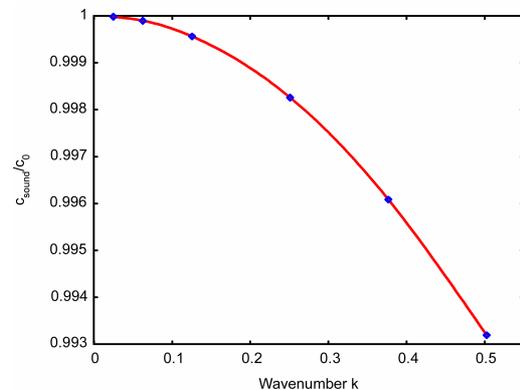


Abbildung 2: Abweichung der tatsächlichen von der theoretischen Schallgeschwindigkeit bei ebenen Wellen in Abhängigkeit von der Wellenzahl k .

Akustische Eigenschaften der LBM

Die akustischen Eigenschaften der LBM wurden mit Hilfe von laufenden ebenen Wellen bei verschiedenen Wellenzahlen k und Viskositäten ν und ζ analysiert. Der simulierte Abschwächungskoeffizient α (Abb. 1) deckt sich dabei mit den theoretischen Werten außerordentlich gut. Dies zeigt, dass die numerische Dissipation der LBM vernachlässigbar ist. Die Abweichung der tatsächlichen Schallgeschwindigkeit c_{sound} vom theoretischen Wert c_0 (Abb. 2) von der Ordnung k^2 zeigt auf, dass der Gitterabstand Δx viel kleiner als die Wellenlänge λ sein muss. Im Fall einer Strömung mit charakteristischer Länge l gilt $\Delta x \ll l \ll \lambda$.

Simulation einer gedackten Pfeife

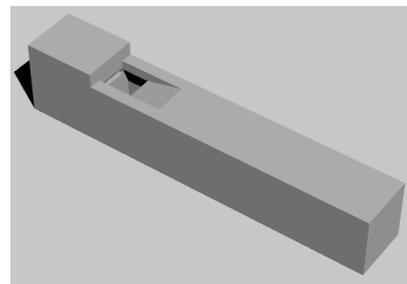


Abbildung 3: Modell der simulierten Pfeife

Eine gedackte Pfeife mit blockflötenartigen Mund- und Labiumdimensionen und einem Resonator von $6 \times 1 \times 1$ cm wurde mit Hilfe eines Linux-Cluster simuliert. Zur Vermeidung von Instabilitäten, vor allem am Labium, wurde bei einer räumlichen Auflösung von $\Delta x = 0,175$ mm (insgesamt 16,5 Mio. Knoten) die Viskosität 10mal höher als Luft gewählt. Um die Reynoldszahl des Strahls vergleichbar zu machen mit der eines realen Instruments wurde auch die Strahlgeschwindigkeit mit 35 m/s verzehnfacht.

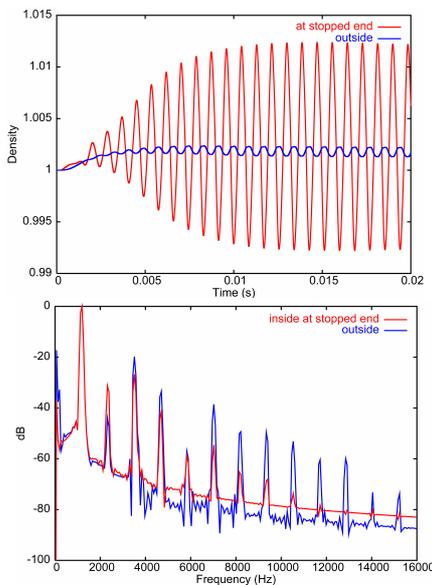


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf (oben) und Spektrum (unten) der Dichte am gedackten Ende (rot) und außerhalb, im Abstand von 5,5 cm, schräg oberhalb des Mundes (blau)

Ist das System eingeschwungen, beträgt der Schalldruckpegel am gedackten Ende 152 dB und außerhalb, 5,5 cm vom Mund entfernt 126 dB.

Analyse der Klangerzeugung

Da die Schwingungsperiode des Strahls kurz ist im Vergleich zur Zeitskala, auf der Dissipation stattfindet, kann man bei der Klangerzeugung in erster Näherung die Viskosität vernachlässigen. Die Annahme einer inviskosen, isentropen Strömung führt zu einem Mechanismus der Kopplung von Strahl und Schallfeld, bei dem auf jedes Fluidelement im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} des Strahls mit der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$) eine Corioliskraft $\rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ wirkt. Die dabei im Schallfeld \mathbf{u}' verrichtete Arbeit beträgt [3]:

$$P_{ac} = - \int \rho(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}' dV \quad (3)$$

Dabei wird dem Strahl entweder kinetische Energie entzogen, die als Schall abgestrahlt wird, oder aus dem Schallfeld zugeführt – Absorption von Schall. Um diese Interaktion zu analysieren, wird das simulierte Strömungsfeld in einen inkompressiblen Anteil \mathbf{v} und ein zeitabhängiges, akustisches Potentialfeld \mathbf{u}' zerlegt. In Abb. 5 sind das inkompressible Geschwindigkeitsfeld des Strahls (a) und die Schallschnelle im Mund (b) sowie in (c) und (d) Bereiche von Schallerzeugung (rot) und -absorption (blau) für den Zeitpunkt dargestellt, in dem die Schallschnelle im Mund ihren maximalen nach außen gerichteten Wert erreicht.

Mit Hilfe von Gl. (3) wird auch der hohe Schalldruckpegel verständlich, da Strahlgeschwindigkeit und dadurch auch die Wirbelstärke verzehnfacht ist.

Abb. 6 zeigt den zeitlichen Verlauf der Wirbelschalleistung aufgeteilt in Bereiche bis zur und hinter der Labiumspitze. Die Spektralanalyse (Abb. 7) zeigt, dass im Mund (rot) die 2. Harmonische um 2,5 dB stärker ist als Grundschwingung und dass dieser Bereich somit zur Generierung von Harmonischen beiträgt. Wogegen die Beiträge ober- und unterhalb des Labiums vor allem zur Grundschwingung beitragen.

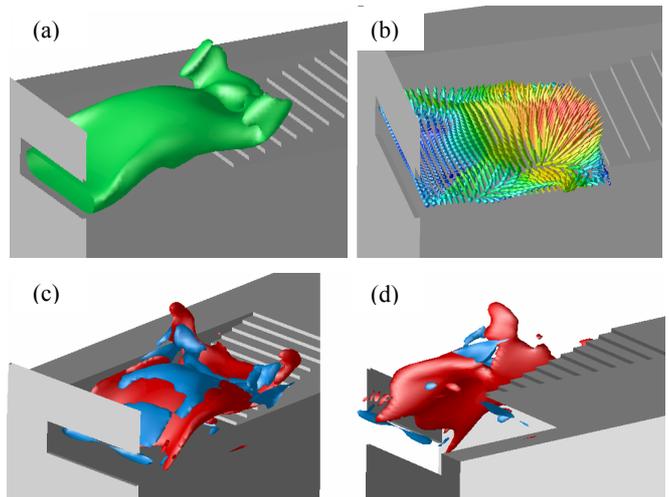


Abbildung 5: Isofläche der inkompressiblen Strömung des Strahls (a) und Schallschnelle im Mund (Ebene auf Höhe des Labiums) im Moment der maximalen Schnelle (b), Isoflächen der Wirbelschalleistung des Geschwindigkeitsfelds (c, d) – rot: Schallerzeugung, blau: Schallabsorption

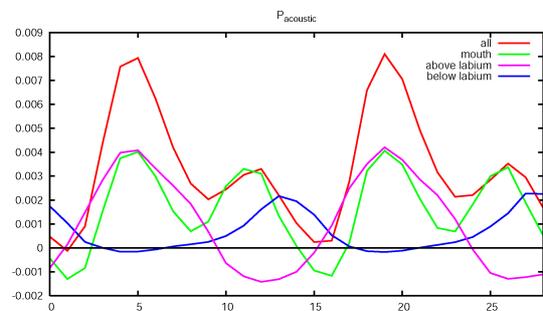


Abbildung 6: zeitlicher Verlauf der Wirbelschalleistung im Mund zwischen Strahlauslaß und Labium und ober- und unterhalb des Labiums während 2 Schwingungsperioden.

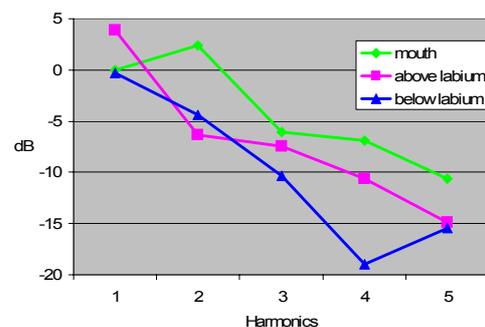


Abbildung 7: Spektrum der Wirbelschalleistung: im Mund von Strahlauslass bis zum Labium, oberhalb und unterhalb des Labiums

Literatur

- [1] Succi, S.: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [2] d'Humières, D. et al.: Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 360 (2002), 437-451.
- [3] Howe, M.S.: Theory of Vortex Sound. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.