

Zu einem nicht-linearen, FE-basierten Lösungsansatz zur Rekonstruktion gedämpfter Schallfelder von Innenräumen

Robert Anderssohn^{1,3}, Steffen Marburg¹, Hans-Jürgen Hardtke¹, Christian Großmann²

¹ Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland

² Institut für Numerische Mathematik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Deutschland

³ Email: anderssohn@ifkm.mw.tu-dresden.de

Einleitung

Für die Verbesserung der Akustik von Struktur-Fluidgekoppelten Systemen hinsichtlich Schallpegelminimierung oder Klangqualität werden Experimente und Simulationen durchgeführt. Für die Optimierung von Simulationsergebnissen spielt die Bestimmung der akustischen Wandadmittanz eine große Rolle. Mit dem Wissen über die Admittanz können real auftretende Schwingungs- und Dämpfungseinflüsse besser nachempfunden werden.

Dieser Beitrag stellt einen Algorithmus vor, mit dem die Wandadmittanz in geschlossenen Räumen mithilfe möglichst wenigen Schalldruckmessungen über den gesamten Rand abgeschätzt werden kann. Dafür muss eine Schwingungserregung über eine Schallquelle im Innern oder über die das Medium einschließende Struktur vorhanden und bekannt sein. Im Gegensatz zu den meisten Lösungen in der inversen Akustik wird die Aufgabe mit einem nicht-linearen Optimierungsalgorithmus formuliert. Ist die Wandadmittanz hinreichend gut approximiert, kann das komplette Schallfeld rekonstruiert werden.

Die Bestimmung der Admittanz aus der Nachhallzeit und mithilfe des Kundt'schen Impedanzrohres sind beides Methoden zur lokalen Admittanzermittlung. Wegen der Vernachlässigung von Rückkopplungseigenschaften in Innenräumen ist deren Anwendung beschränkt.

Bislang widmet sich die Forschung in der inversen Akustik vorwiegend der Identifikation von Schallquellen [2–4]. Dabei werden zum Teil auch Admittanzen berücksichtigt, die unbekanntes Größen sind dabei aber ausschließlich Druck und Schnelle. Bei den oft auf Basis der Randelemente-Methode dafür entwickelten Algorithmen werden in der Regel schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme unter Zuhilfenahme von Regularisierungsmethoden gelöst.

In [1] wurde gezeigt, dass die Wandadmittanz aus der Kenntnis über das Schalldruckfeld global abgeschätzt werden kann. Das Schallfeld wiederum soll dabei aus einer Selektion von Schalldruck- oder Schallschnellemessungen rekonstruiert werden. Ein Ansatz zur Rekonstruktion von durch Wandadmittanzen gedämpften Schallfeldern wird in [5] beschrieben. Dabei wird eine lineare Lösung des auf der Methode der finiten Elemente (FEM) hergeleiteten Gleichungssystems für beliebige zwei-dimensionale Gebiete gefunden. Damit können Schalldruckfelder für Probleme mit Dirichlet-Randbedingungen rekonstruiert werden.

Um beliebige Admittanz-Randbedingungen zulassen zu können, wird, wie im Folgenden dargestellt, das nicht-lineare Gleichungssystem der FEM über ein hybrides Optimierungsverfahren gelöst. Dabei wird dem gradienten-basierten Newton-Verfahren [7] ein genetischer Algorithmus [6] voran-

gestellt. Das Ergebnis des genetischen Algorithmusses sind die Startwerte für das Newton-Verfahren. Die Zielfunktion, sein Gradient und die Hesse-Matrix werden mithilfe von Eigenmoden berechnet.

Zielfunktion und Ableitungen

Der stationäre Zustand der Akustik eines durch Wandadmittanzen gedämpften Innenraumes, indem die konstante Dichte ρ_0 und die Schallgeschwindigkeit c des Fluids herrscht, kann mit dem Randwertaufgabe, bestehend aus der Helmholtz-Differentialgleichung und hier der Robin-Randbedingung beschrieben werden.

Für Räume beliebiger Geometrie kann das Randwertproblem näherungsweise über die FEM gelöst werden.

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M} - ik \mathbf{D}) \mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (1)$$

In Gl. (1) bedeuten \mathbf{K} , \mathbf{M} und \mathbf{F} die Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix. Der Vektor der rechten Seite \mathbf{b} beziehungsweise die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} berechnen sich aus dem Produkt der Randmassenmatrix und der Strukturschnelle beziehungsweise der mit $\rho_0 c$ multiplizierten Wandadmittanz Y . Die Admittanz ist entlang des Randes stückweise konstant und im untersuchten Frequenzbereich unabhängig von der Wellenzahl k .

Als Zielfunktion für das Optimierungsverfahren wird die Minimierung der Quadratmittelsumme über die gemessenen Schalldrücke \check{p}_m an einer Auswahl Messpunkten gewählt:

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}) = \|\mathbf{q}(\mathbf{y})\|^2 \rightarrow \min!; \quad \mathbf{q}(\mathbf{y}) = \check{\mathbf{p}}_m - \mathbf{p}_m(\mathbf{y}). \quad (2)$$

Hier ist \mathbf{y} der Vektor der unbekanntes Admittanzen. In dem Fall, dass keine inneren Schallquellen vorliegen und das Fluid ausschließlich durch Bewegung der berandenden Struktur in Schwingung versetzt wird, kann der berechnete Druck als modale Lösung für bestimmte \mathbf{y}_l wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{p}_m(\mathbf{y}_l) = -\mathbf{X}_m \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{X}_b^T \mathbf{b}_b. \quad (3)$$

Dabei sind \mathbf{X}_m und \mathbf{X}_b die Anteile der Modalmatrix \mathbf{X}_z , welche mit den Messknoten respektive den Knoten, die sich auf dem Rand des FE-Netzes befinden, korrespondieren. Die Eigenvektoren der Modalmatrix und $\mathbf{\Delta}$, die Diagonalmatrix $\mathbf{\Delta} = \text{diag}\{\alpha_j + ik\beta_j\}$ mit den Eigenwerten α_j und β_j werden durch Lösung des allgemeinen linearen Eigenwertproblems der Gl. (1) nach Transformation in den Zustandsraum zweiter Art berechnet.

Bei dem schnell konvergierenden Newton-Verfahren wird die Zielfunktion durch eine quadratische Funktion approximiert. In jedem Iterationsschritt verlangt diese Näherung die Berechnung der Sensitivität (erste Ableitung oder Gradient) und der

Hesse-Matrix (zweite Ableitung) der Zielfunktion. Beide werden analytisch berechnet.

Die Sensitivität bezüglich des i -ten Admittanzparameters ist unter Beachtung der Produktenregel

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y_i} = \frac{\partial \mathbf{q}^H}{\partial Y_i} \mathbf{q} + \mathbf{q}^H \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y_i}. \quad (4)$$

Die erste Ableitung des Vektors \mathbf{q} ist

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y_i} = \mathbf{X}_m \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{X}_z^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial Y_i} \mathbf{X}_z \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{X}_b^T \mathbf{b}_b, \quad (5)$$

wobei \mathbf{Q} die Systemmatrix im Zustandsraum darstellt. Es ist ein Vorteil der modalen Berechnung des Gradienten, dass die Ableitung der Inversen der Systemmatrix durch ein Matrix-Produkt ersetzt werden kann. Das ij -te Element der Hesse-Matrix \mathbf{H} ist nach dem gleichen Prinzip dann

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{q}^H}{\partial Y_i \partial Y_j} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}^H}{\partial Y_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y_j} + \frac{\partial \mathbf{q}^H}{\partial Y_j} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y_i} + \mathbf{q}^H \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial Y_i \partial Y_j}. \quad (6)$$

Die zweiten Ableitungen des Vektors \mathbf{q} berechnen sich in ähnlicher Weise wie die ersten Ableitungen. Ebenfalls können die Ableitungen der Inversen der Systemmatrix mithilfe der modalen Darstellung umgangen werden.

Anwendung und Ausblick

Der vorgestellte Optimierungsalgorithmus wurde an verschiedenen zwei-dimensionalen Modellen mit simulierten (rauschfreien) Messwerten getestet. Die Qualität der gewählten Zielfunktion (2) wurde bezüglich folgender Parameter untersucht: die Anzahl der notwendigen Messpunkte, die mögliche Anzahl unbekannter Admittanzparameter, der Einfluss der Positionierung der Messstellen und die Funktionalität bei unterschiedlichen Frequenzen.

Es konnte gezeigt werden, dass eine sehr geringe Anzahl Messpunkte ausreicht, um die Wandadmittanz und somit das komplette Schallfeld aus rauschfreien Messungen mit sehr geringem Fehler zu rekonstruieren. Aufgrund der Natur des genetischen Algorithmusses steigt der Rechenaufwand mit der Anzahl unbekannter Parameter stark an. Liegen gute Startparameter vor, gelangt man auch bei einer größeren Anzahl unbekannter Admittanzwerte mit dem Newton-Verfahren sehr schnell zum globalen Minimum der Zielfunktion. Es hat sich als günstig erwiesen, die Messpunkte unregelmäßig zu verteilen, um lineare Abhängigkeiten zwischen den Messwerten

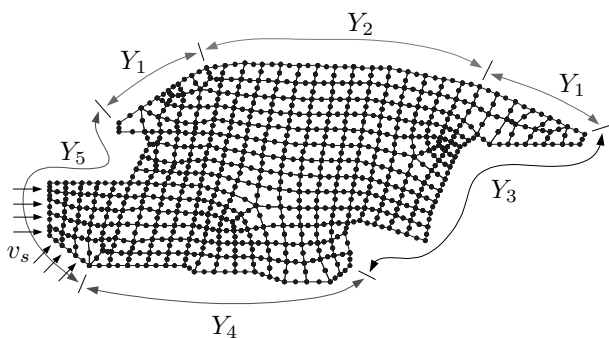


Abbildung 1: FE-Modell des Fahrzeug-Innenraumes mit Admittanz-Verteilung.

zu verhindern. Schallfelder mit Frequenzen nahe der Nullfrequenz sind schwer zu ermitteln. Dafür reichen in einigen Fällen weniger Messpunkte als die Anzahl Halbwellen, die das Gebiet durchlaufen, aus.

In Abbildung 1 ist ein FE-Modell eines vereinfachten Innenraumes einer Sedan-Karosserie zu sehen. Ebenfalls sind die Erregung über den Fußraum und eine Verteilung der Admittanzparameter zu sehen. Abbildung 2 zeigt repräsentativ das exakt rekonstruierte Schallfeld bei $f = 293 \text{ Hz}$ unter der Vorgabe von 3 rein reellen und 2 komplexen Admittanzen ungleich Null. Hierbei zählt jeder Real- und Imaginärteil als unbekannter Parameter. Wie man erkennen kann, reichen selbst zehn, in dem Innenraumes des Fahrzeuges verteilte Messstellen aus, ein globales, auffindbares Minimum in der Zielfunktion zu sichern.

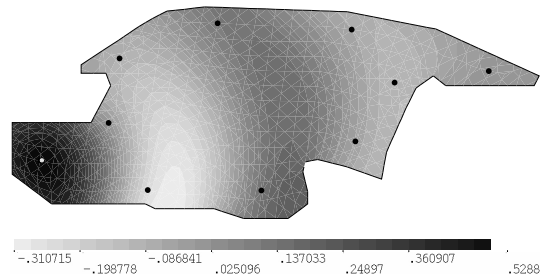


Abbildung 2: Rekonstruiertes Schalldruckfeld mit 10 Messknoten und 7 unbekanntenen Admittanz-Variablen bei 293 Hz (dargestellt ist der Realteil in Pa ; $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $c = 340 \text{ m/s}$).

Literatur

- [1] St. Marburg und H.-J. Hardtke. A study on the acoustic boundary admittance. determination, results and consequences. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier Science Ltd., 23:737–744, 1999.
- [2] W. A. Veronesi und J. D. Maynard. Nearfield acoustic holography (nah). ii. holographic reconstruction algorithms and computer implementation. In *Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 81, S. 1307–1322. 1987.
- [3] B. K. Gardner und R. J. Bernhard. A noise source identification technique using an inverse helmholtz integral equation method. In *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Bd. 110, S. 84–90. 1988.
- [4] B.-K. Kim und J.-G. Ih. On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method. In *Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 100, S. 3003–3016. Academic Press Inc., 1996.
- [5] R. Anderssohn, St. Marburg und Chr. Großmann. FEM-based reconstruction of sound pressure field damped by partially absorbing boundary conditions. In *Mechanics Research Communications*, 2006, im Druck.
- [6] *MATLAB® Reference guide*, The MathWorks, Inc., 2000.
- [7] I. N. Bronstein und K. A. Semendiyayev, *Handbook of mathematics*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1999.