Ermittlung der Messunsicherheit, Teil 1: Grundlegende Konzepte

Bernd R.L. Siebert

Physikalisch-Technische Bundesanstalt, 38116 Braunschweig, Deutschland, Email: Bernd.Siebert@ptb.de

Einleitung

Generell kann man den Wert einer Messgröße, z.B. den Abstand eines punktförmigen Mikrophons von einer punktförmigen Lärmquelle, nicht exakt ermitteln. Zu einem gegeben Zeitpunkt hat dieser Abstand zwar genau einen Wert, aber mit endlichem Aufwand lässt sich dieser Wert nicht exakt bestimmen. Daher ist es unzweckmäßig von einem „wahren Wert" zu sprechen und ein Wert ist nur brauchbar, wenn man zusätzlich ein Maß für die *Güte* dieses Wertes angibt. Das Maß für die *Güte* oder *Verlässlichkeit* eines Messwertes ist üblicherweise die Messunsicherheit oder die erweiterte Messunsicherheit.

Der *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) [1,2] ist weltweit anerkannt als das grundlegende Dokument für die Ermittlung der Unsicherheit die Werten gemessener oder auch berechneter Größen beizuordnen ist. In diesem Kurzbericht werden zunächst die Grundlagen der Unsicherheitsermittlung erörtert und dann das Standardverfahren des GUM kurz vorgestellt. Es wird in Teil 2 auf ein Beispiel angewendet werden.

Modell

Der GUM fordert das Zusammenwirken aller Größen, die die Messgröße (Ausgangsgröße) maßgeblich beeinflussen, durch ein geeignetes Modell darzustellen. Dies ist in der Praxis meist die schwierigste Teilaufgabe, da es keine geschlossene Theorie zur Modellbildung gibt.

Aber es gibt Ansätze zur systematischen Modellbildung [3]. Diese basieren auf der Betrachtung der Ursache-Wirkungskette und der Idee, zunächst von einer idealen Messung auszugehen und dann schrittweise alle störenden Einflüsse zu beachten. Dies ist gleichbedeutend mit einer gründlichen Analyse der Messaufgabe, die ohnehin notwendig ist.

Als Beispiel betrachten wir das Quadrat des Abstands, D, zwischen einem Mikrophon (M) und einer Lärmquelle (L). **Idealisiert** sind zunächst beide punktförmig und das entsprechende Modell ist extrem einfach: der Wert des Abstands ist gleich dem von einem Längemessmittel angezeigten Wert, d_I, I für indiziert. Im **realen** Modell muss man die Auflösung der Ablesung, δD_A, und die beim Kalibrieren festgestellte Messabweichung, ΔD_K, berücksichtigen. Darüber hinaus sind weder Mikrophon noch Lärmquelle punktförmig. Um das mögliche Vorgehen zu demonstrieren, betrachten wir eine isotrop emittierende kugelförmige Schallquelle mit dem Radius R_L, belassen das Mikrophon aber weiterhin als „Punkt". Nun ist eine Verteilung der Abstände zu beachten und genau zu definieren, was mit D gemeint ist! Hier sei D der Abstand zwischen dem Mittelpunkt der kugelförmigen Lärmquelle und dem „Mikrophonpunkt". Erwartungswert und Standardabweichung für D müssen bestimmt werden. Die systematische Abweichung dieses Erwartungswertes bezeichnen wir mit ΔD_G, (Geometrie), und $u(\Delta D_\mathrm{G})=\sigma$; siehe Teil 2. Das Modell muss für systematische Abweichungen **korrigiert** werden. Diese Überlegungen führen auf eine Gleichung für die Messgröße D^2, die wir als Ausgangsgröße Y bezeichnen:

$$Y = \left(d_\mathrm{I} - \delta D_\mathrm{A} - \Delta D_\mathrm{K} - \Delta D_\mathrm{G} \right)^2 . \tag{1}$$

Zur Vereinfachung der formalen Diskussion benutzt der GUM eine generische Darstellung und stellt Y als Funktion der Eingangsgrößen X_i dar:

$$Y = f\left(X_1 ,... X_N \right). \tag{2}$$

Ein Modell ist nie exakt oder vollständig, sondern spiegelt den vorhandenen Kenntnisstand über das Messverfahren: **Modellieren ist ein Bayes'scher Lernprozess**! Man fordert von einem Modell für die Ermittlung der Messunsicherheit, dass man damit die Unsicherheit auf etwa 5% „genau" berechnen kann.

Kenntnisbasierte Wahrscheinlichkeitsdichten

Die prinzipiell unvollständigen Kenntnisse über eine Größe X beschreibt man durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF, englisch: probability density function) für X. Der Erwartungswert dieser PDF wird als bester Schätzwert x für den Wert von X und die Standardabweichung als die diesem beigeordnete Unsicherheit $u(x)$ interpretiert. Die **erweiterte Messunsicherheit** U_p beschreibt die Halbweite des **Überdeckungsintervalls**, das mit der Wahrscheinlichkeit p den gesuchten Wert enthält. Als Wert für die **Überdeckungswahrscheinlichkeit** p wird meist 0,95 gewählt. Die Zuordnung einer PDF folgt nach festen Regeln aus den gegebenen Kenntnissen, siehe [3] und Teil 2 dieser Arbeit. Abbildung 1 verdeutlicht diese Begriffe.

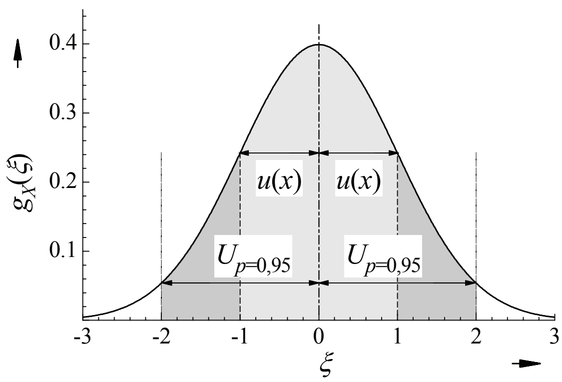

Abbildung 1: Eine Normalverteilung nimmt man an, wenn man den Wert einer Größe und die diesem beigeordnete Unsicherheit kennt. Die **Unsicherheit** $u(x)$ ist gleich der Wurzel aus der Varianz, sie **charakterisiert** die PDF. **Die erweiterte Messunsicherheit** ist eine **Wahrscheinlichkeitsaussage**.

Um die Kenntnisse für mehrere Eingangsgrößen zu beschreiben, führen wir die gemeinsame PDF für die Eingangsgrößen, $g_X(\boldsymbol{\xi})$, ein. Dabei nutzen wir zwecks kompakter Schreibweise Vektoren für die Eingangsgrößen, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=(X_1,\ldots,X_N)$, und analog für deren mögliche Werte $\boldsymbol{\xi}$. Um gemeinsame Unsicherheiten zu definieren, betrachten wir

$$u\left(x_i, x_j\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g_X(\boldsymbol{\xi})\left(\xi_i-x_i\right)\left(\xi_j-x_j\right) \mathrm{d} \boldsymbol{\xi}, \tag{3}$$

wobei $u(x_i,x_i)=u^2(x_i)$. Der GUM verwendet für die gemischten Glieder **Korrelationskoeffizienten**:

$$r\left(x_i, x_j\right)=\frac{u\left(x_i, x_j\right)}{u\left(x_i\right) u\left(x_j\right)}. \tag{4}$$

Kenntnisse aus Wiederholungsmessungen führen auf *t*-Verteilungen.

Markov-Formel

Wenn das Modell feststeht und allen Eingangsgrößen eine PDF zugewiesen wurde, kann man mögliche Werte der Eingangsgrößen in die Modellgleichung einsetzen, um einen möglichen Wert der Ausgangsgröße zu erhalten; dies wird in Abbildung 2 illustriert.

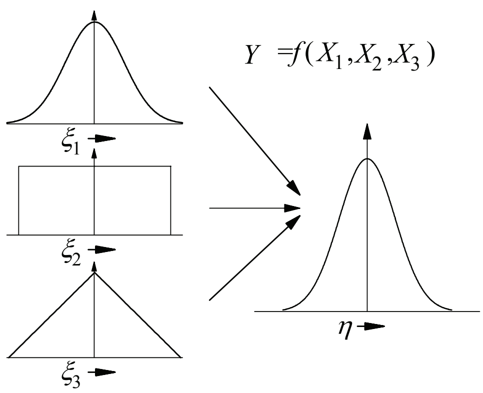

Abbildung 2: Die Modellfunktion f verknüpft alle relevanten Einflussgrößen, $X_1,\ldots,X_N$, zur Messgröße Y und liefert für jeden möglichen Satz von Werten der Einflussgrößen, $\xi_1,\ldots,\xi_N$,. einen möglichen Wert η von Y.

Die PDF für Y, d.h. die PDF $g_Y(\eta)$ erhält man aus der Markov-Formel, die über alle möglichen Werte der Eingangsgrößen integriert und über die Modellgleichung jeweils einen möglichen Wert η mit der δ–Funktion herausfiltert und diesem die durch $g_X(\boldsymbol{\xi})$ bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte zuordnet:

$$g_Y(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} g_X(\boldsymbol{\xi}) \delta(\eta-f(\boldsymbol{\xi})) \mathrm{d} \boldsymbol{\xi}. \tag{5}$$

Durch Integration, die dank der δ–Funktion einfach ist, erhält man den Erwartungswert,

$$\mathrm{E} Y=\int_{-\infty}^{\infty} g_Y(\eta) \mathrm{d} \eta=\int_{-\infty}^{\infty} g_X(\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d} \boldsymbol{\xi} \equiv y, \tag{6}$$

den wir als besten Schätzwert y bezeichnen, und die Varianz,

$$\operatorname{Var} Y=\int_{-\infty}^{\infty} g_X(\boldsymbol{\xi})(f(\boldsymbol{\xi})-y)^2 \mathrm{d} \boldsymbol{\xi} \equiv u^2(y), \tag{7}$$

deren Wurzel wir als die dem besten Schätzwert y beigeordnete Unsicherheit bezeichnen.

Standardverfahren des GUM

Der GUM stellt ein einfaches Verfahren zur Verfügung, das die meisten Probleme der Praxis ohne mathematisch-theoretischen Aufwand abdeckt. Man entwickelt die Modellfunktion um die Erwartungswerte (die besten Schätzwerte) der Eingangsgrößen in eine Taylorreihe erster Ordnung. Dies bedeutet eine **Linearisierung** des Modells. Wir finden dann mögliche Werte η gegeben durch:

$$\eta=f_{\mathrm{LIN}}(\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^N c_i\left(\xi_i-x_i\right)+R, \tag{8}$$

wobei gilt $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1,\ldots,x_N)$ und das Restglied R fasst alle Glieder höherer Ordnung zusammen. Die c_i,

$$c_i=\left.\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right| \forall_i \xi_i=x_i, \tag{9}$$

werden Empfindlichkeitskoeffizienten genannt. Wenn man f_{LIN} in Gleichung (6), einsetzt erhält man $y=f(\boldsymbol{x})$, d.h. den besten Schätzwert für den Wert der **Ausgangsgröße** erhält man durch Einsetzen der besten Schätzwerte für die Werte der **Eingangsgrößen** in die lineare Modellfunktion. Die beigeordnete Unsicherheit findet man durch Einsetzen von f_{LIN} in Gleichung (7). Diese liefert das bekannte Gaußsche Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz,

$$u^2(y)=\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i u\left(x_i\right) r\left(x_i, x_j\right) c_j u\left(x_j\right), \tag{10}$$

in kompakter Schreibweise, wobei $r(x_i,x_i)=1$.

In Teil 2 wird das Beispiel erweitert. Dort werden auch die Grenzen der Anwendbarkeit dieses Standardverfahren diskutiert. Ferner wird ein allgemeines Verfahren vorgestellt.

Literatur

[1] ISO: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), ISO, Geneva, CH, 1993

[2] DIN V ENV 13005: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen, Beuth Verlag Berlin, 1999 (Deutsche Übersetzung des GUM)

[3] Sommer, K.-D und Siebert, B.R.L.: Systematische Modellbildung und Grundsätze der Bereichskalibrierung, Technisches Messen 72 (2005) 258-277

[4] DKD-3 Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen und Beispiele in DKD-3-E1 und –E2 . URL(2006-03-19): http://www.dkd.info

Ermittlung der Messunsicherheit, Teil 2: Beispiel und Rechenmethoden

Bernd R.L. Siebert

Physikalisch-Technische Bundesanstalt, 38116 Braunschweig, Deutschland, Email: Bernd.Siebert@ptb.de

Einleitung

In Teil 1 wurden die grundlegenden Konzepte und das **GUM Standardverfahren** besprochen. Hier wenden wir letzteres auf ein Beispiel an. Dabei werden die Grenzen des Standardverfahren aufgezeigt, um dann die **Monte-Carlo-Methode** kurz zu erläutern, die diese Grenzen überwindet.

Abstand zwischen Mikrophon und Lärmquelle

Dem Problem der Bestimmung des Abstands zwischen Mikrophon (M) und Lärmquelle (L) begegnet man z.B. bei der Bestimmung des Schallleistungspegels L_w nach ISO 3745, wobei der von einer Lärmquelle verursachte Schalldruck p an mehreren Punkten auf einer gedachten Kugeloberfläche S_1 zu messen ist. Wir nehmen bewusst **nicht** auf die Norm Bezug, sondern betrachten lediglich den Einfluss der Geometrie der Lärmquelle. Als Bezugsfläche wählen wir $S_0=(4\pi)^{-1}$ m^2.

Abbildung 1 verdeutlicht die **hypothetische Messaufgabe**. Der Abstand Z_M zwischen L-Mitte und M ist zu messen und der vom Längenmessmittel angezeigte Wert sei z_M. Den Index M brauchen wir, weil auch die Längenmessung des Radius der Lärmquelle R_L betrachtet wird. Wie in Teil 1 beschrieben, muss man die Auflösung der Ablesung, $X_\mathrm{A,M}$, die beim Kalibrieren (K) festgestellte Messabweichung, $X_\mathrm{K,M}$, und die durch die Geometrie (G) bedingte systematische Abweichung, $X_\mathrm{G,M}$, berücksichtigen. Zur Erinnerung, Großbuchstaben bezeichnen Größen und Kleinbuchstaben deren beste Schätzwerte. Das Modell für Ermittlung von $u(z_\mathrm{M})$, und analog für $u(r_\mathrm{L})$ ist daher:

$$Z_\mathrm{M} = z_\mathrm{I,M} - X_\mathrm{A,M} - X_\mathrm{K,M} - X_\mathrm{G,M}\,. \qquad (1)$$

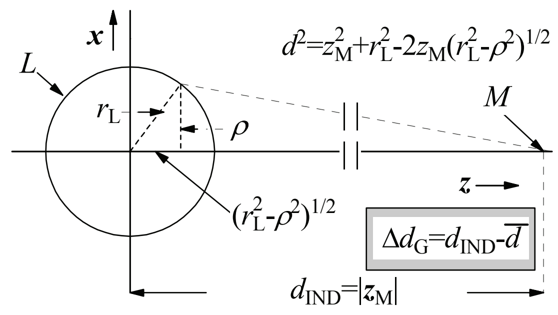

Abbildung 1: Schematische Darstellung einer als Kugel idealisierten Lärmquelle L und eines punktförmigen Mikrophons M; L emittiert von der Oberfläche.

Zahlenwerte: z_M=2 m, r_L=0,1 m, die $x_\mathrm{A,M}$, $x_\mathrm{K,M}$, $x_\mathrm{A,L}$ und $x_\mathrm{K,L}$ haben alle den Wert 0 m und die ihnen beigeordnete Unsicherheit den Wert 0,0029 m, d.h. 0,005/√3 m. X_G wird später noch ausführlich erörtert werden. In Z_M und R_M treten X_KM und X_KG auf. Wir benutzen das **selbe** Längenmessmittel und erhalten in unserem Beispiel einen **Korrelationskoeffizienten** $r(z_\mathrm{M},r_\mathrm{L})$ mit dem Wert 0,5.

Standardverfahren des GUM

Wir sind an S_1 interessiert, also dem Abstandsquadrat; den Faktor 4 π haben wir durch die Definition von S_0 eliminiert. Deshalb ist es sinnvoll, nicht D_LM zu modellieren sondern direkt S_1. Der Abstand D_LM zwischen L und M liegt nach Abbildung 1 zwischen Z_M–R_L (Minimum) und der der Wurzel aus der Quadratsumme von Z_M und R_L (Maximum). Wir kennen also nur Grenzen der Abstandsquadrate und nehmen eine **Rechteckverteilung** an. Durch Einsetzen der Zahlenwerte findet man: der Erwartungswert, also der beste Schätzwert für S_1 ist s_1 = 3,81 m^2 und die halbe Intervallbreite ist 0,2 m^2 woraus, dividiert durch √3, folgt dass $u(s_1)$=0,1155m^2. Dagegen kann man kann man alle anderen Unsicherheiten vernachlässigen. In der Akustik ist man meist an Pegeln interessiert. Zur Demonstration betrachten wir einen „Pegel" von S_1:

$$L_{s_1} = 10\lg s_1 / s_0^{-1} = 5.809 \text{ dB}\,, \qquad (2)$$

$$u\left(L_{s_1}\right) = \frac{10\,u_r\left(s_1\right)}{\ln 10} = 0.132 \text{ dB} : u_r\left(s_1\right) = \frac{u_r\left(s_1\right)}{s_1}. \qquad (3)$$

Wenn diese Unsicherheit nicht akzeptabel ist muss man sich mehr Kenntnisse beschaffen. Dies ist hier leicht möglich. Man kann Abbildung 1 entnehmen, dass

$$\bar{s}_1 = 2r_L^{-2}\int_0^1 \rho \mathrm{d}\rho \left(z_\mathrm{M}^2 + r_\mathrm{L}^2 - 2z_\mathrm{M}r_\mathrm{L}\sqrt{1-\rho^2}\right). \qquad (4)$$

Daraus folgt ein verbessertes Modell:

$$S_1 = Z_\mathrm{M}^2 + R_\mathrm{L}^2 - 4/3\left(Z_\mathrm{M}R_\mathrm{L}\right). \qquad (5)$$

Wir bestimmen die Empfindlichkeitskoeffizienten, siehe Gleichung (9) in Teil 1, und erhalten:

$$c_{z_\mathrm{M}} = 2z_\mathrm{M} - 4/3\, r_L \text{ und } c_{r_\mathrm{L}} = 2r_\mathrm{L} - 4/3\, z_\mathrm{M}\,, \qquad (6)$$

mit den Werten 4,2667 m und –2,4667 m. Daraus folgt

$$u^2\left(s_1\right) = c_{z_\mathrm{M}}^2 u^2\left(z_\mathrm{M}\right) + c_{r_\mathrm{L}}^2 u^2\left(r_\mathrm{L}\right). \qquad (7)$$

Aus den gegebenen Zahlenwerten findet man s_1=3,743 m^2, $u(s_1)$=0,0187 m^2, bzw. L_s1=5,733 dB und $u(L_\mathrm{S1})$=0,0217 dB. Es tritt keine systematische Abweichung auf, weil diese **durch mehr Kenntnisse eliminiert** wurde!

Bei dieser Betrachtung haben wir noch nicht die **Korrelation** von Z_M und R_L berücksichtigt. Wenn wir diese beachten und in Gleichung (10) in Teil 1 die Zahlenwerte einsetzen erhalten wir $u(L_\mathrm{S1})$=0,0191 dB. Dieser Wert ist **kleiner**, weil wir die **Differenz positiv korrelierter** Größen betrachten.

Im Fall des vereinfachten Modells erhält man für die Ausgangsgröße annähernd eine Rechteckverteilung und man würde die erweiterte Unsicherheit überschätzen; siehe Abbildungen 2 und 3. Umgekehrt, wenn man Kenntnisse aus wenigen Wiederholungsmessung nutzt, erhält man *t*-Verteilungen, die größere erweiterte Messunsicherheiten liefern. In der Praxis aber, siehe Abbildung 4, erhält man, wenn viele Eingangsgrößen vorliegen, nahezu Gaußförmige PDFs. Das heißt, meist genügt es ein mittels Gleichung (8) in Teil 1 linearisiertes Modell zu behandeln. Allerdings gibt es auch Probleme, bei denen man das nicht kann [1].

Das Monte-Carlo-Verfahren

Wenn immer möglich, sollte man das Standardverfahren nach GUM nutzen. Wenn dies nicht möglich ist, oder zu kompliziert wird, kann man, ausgehend von der Markov-Formel, siehe Gleichung (5) in Teil 1, die PDF für die Ausgangsgröße berechnen. Das Monte-Carlo-Verfahren eignet sich hierfür, weil es sehr einfach ist.

Die Vorbereitung ist genauso wie beim Standardverfahren. Man sammelt Kenntnisse über die Eingangsgrößen und drückt diese durch Wahrscheinlichkeitsdichten (PDF) aus. Die Modellbildung hingegen ist einfacher, weil man das Modell nicht notwendig explizit nach der Ausgangsgröße auflösen muss [2]. Man muss nur sicherstellen, dass man aus jedem Satz von möglichen Werten der Eingangsgrößen eindeutig auf einen möglichen Wert der Ausgangsgröße oder Werte der Ausgangsgrößen schließen kann. Diesen Satz von Werten nennen wir Stichprobe ξ_s. Die Stichproben müssen so gewählt werden, dass die Häufigkeit, mit der mögliche Werte jeder Eingangsgröße gewählt werden, der PFD für diese Größe entspricht. Für jede Stichprobe kann man dann einen möglichen Wert der Ausgangsgröße berechnen, der dann ebenfalls repräsentativ ist und η_s genannt wird. Man erhält dann

$$y \cong y_S = S^{-1}\sum_{s=1}^{S}\eta_s \quad \text{und}$$

$$u^2(y) \cong u_S^2(y) = \frac{1}{S-1}\sum_{s=1}^{S}\eta_s^2 - \left(S^{-1}\sum_{s=1}^{S}\eta_s\right)^2. \tag{8}$$

Wenn S groß wird, konvergieren die Werte gegen die exakten Werte. Für große Stichproben ist $y{-}y_S$ normal verteilt mit der Standardabweichung $u_S(y)/\sqrt{S}$; ähnliche Überlegungen gelten für $u(y){-}u(y_S)$. Zusätzlich kann man die Stichprobenwerte in ein Feld einsortieren und damit die Form der PDF für Y berechnen und daraus die erweiterte Unsicherheit ermitteln. Details findet man z.B. in [2]

Die Monte-Carlo-Methode ist besonders vorteilhaft, wenn man mehr als eine Ausgangsgröße hat und wenn diese von den **selben** und unterschiedlichen Eingangsgrößen abhängen. Man berechnet dann aus **einer** Stichprobe ξ_s jeweils einen möglichen Wert für **alle** Ausgangsgrößen, also $\eta_{i,s}$, und kann dann ohne mühsame Analyse die Kovarianzmatrix für die Ausgangsgrößen bestimmen, indem man die Summen der Produkte $\eta_{i,s}\eta_{j,s}$ berechnet und diese anlog zu Gleichung (8) auswertet.

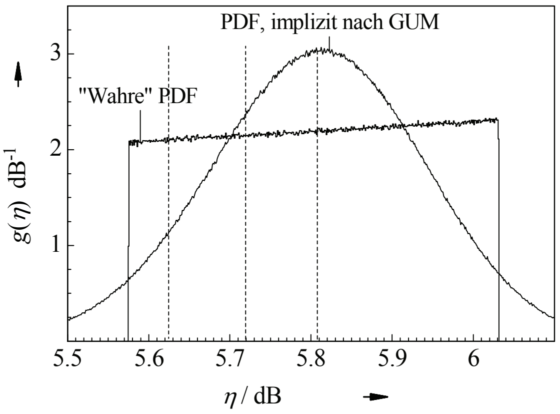

Abbildung 2: Die Wahrscheinlichkeitsdichte (PDF) für den „Pegel“ von S_1 berechnet mit der Monte-Carlo-Methode für das einfache Modell und die vom GUM implizit angenommene PDF.

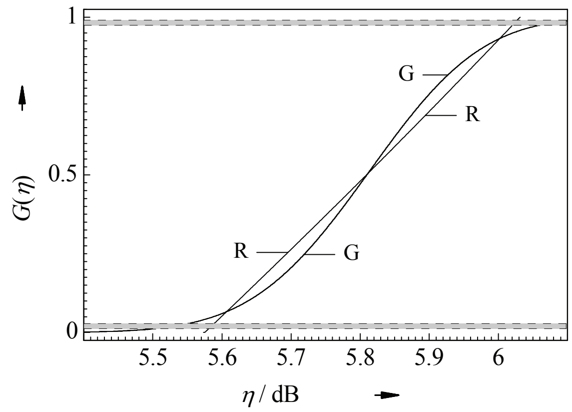

Abbildung 3: Wie Abbildung 2, aber Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Schnittpunkte mit den grauen Bändern sind die die Grenzen des Überdeckungsbereichs.

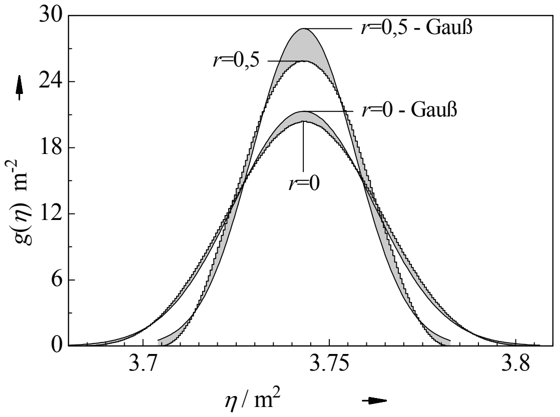

Abbildung 4: Die Wahrscheinlichkeitsdichten (PDF) für S_1 berechnet mit der Monte-Carlo-Methode für das verbesserte Modell mit und ohne Berücksichtigung der Korrelation und die vom GUM implizit angenommenen PDFs.

Literatur

[1] Goydke, H. ; Siebert, B. R. L. ; Scholl, W.: Studie zur Bestimmung von Messunsicherheiten bei Schalldämmungsmessungen. Zeits. für Lärmbekämpfung 51 (2004), 7 – 12

[2] Siebert, B.R.L. und Sommer, K.-D.: Weiterentwicklung des GUM und Monte-Carlo-Techniken, Technisches Messen 71(2004) 67-80