

Modellierung der wechselseitigen Kopplung von Luftschall mit Plattenstrukturen für raumakustische FEM Simulationen

Marc Aretz¹, Andreas Franck²

¹ *Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland, Email: Marc.Aretz@akustik.rwth-aachen.de*

² *Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland, Email: afr@akustik.rwth-aachen.de*

Einleitung

Zur breitbandigen Simulation gekoppelter Luftschall-Körperschallausbreitungsprobleme in geschlossenen Räumen wurde am *Institut für technische Akustik der RWTH Aachen* das FE-Simulations-Programm *Sound Solve* entwickelt [2]. Da die Simulation dünner Flächentragwerke mit den bereits implementierten 3D-Struktur-Elementen nur unter Inkaufnahme sehr langer Rechenzeiten möglich ist, wird *Sound Solve* im Rahmen dieser Arbeit um ein 2D-Struktur-Modell für ebene Flächentragwerke erweitert. Unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Kopplungen ermöglicht die Implementierung dieser *ebenen Schalenelemente* eine effiziente Simulation verschiedener bau- und raumakustischer Problemstellungen, wie die Modellierung von Fensterscheiben oder Leichtbaukonstruktionen, die oftmals nicht mehr in hinreichender Näherung als lokal reagierend angenommen werden können.

Definition und FE-Formulierung der ebenen Schalenelemente

Die Formulierung der *ebenen Schalenelemente* für die FEM ergibt sich aus einer Kombination der Mindlin-Plattengleichungen, welche die Auslenkungen des ebenen Flächentragwerks in Normalenrichtung beschreiben, und der Scheibengleichungen für den ebenen Spannungszustand, welche die sog. "in plane"-Verformungen in der Tragwerkebene beschreiben. Durch Anwendung des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* wird ausgehend von den kombinierten Scheiben- und Plattengleichungen eine Variationsformulierung für die Struktur hergeleitet. Zur Diskretisierung des betrachteten Flächengebiets werden isoparametrische Dreiecks- und Vierecks-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen implementiert. Unter der Annahme harmonischer Schwingungsvorgänge lässt sich das Gesamtsystem durch das folgende diskrete Gleichungssystem approximieren, das sich aus dem Gleichgewicht der inneren und der von außen aufgebrachten, virtuellen Arbeit ergibt:

$$(\mathbf{S}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_{S_r}, \quad (1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist und die Matrizen \mathbf{S}_S und \mathbf{M}_S als *Steifigkeitsmatrix* bzw. *Massenmatrix* bezeichnet werden. Die Vektoren \mathbf{f}_S und \mathbf{f}_{S_r} enthalten die sog. generalisierten Knotenlasten bzw. die Randlasten des Systems. Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ enthält die gesuchten Knotenwerte der Verformungsfreiheitsgrade. Eine ausführliche Herleitung hierzu findet sich in [1].

FE-Formulierung für das Fluid

Die FE-Formulierung für das Fluid kann durch Multiplikation der Helmholtzgleichung mit einer Wichtungsfunktion und anschließender Integration über das betrachtete Volumengebiet hergeleitet werden. Mit Hilfe des erweiterten Greenschen Integralsatzes kann diese Gleichung dann in die für die FEM günstige *schwache Form* umgewandelt werden. Nach der Diskretisierung des Volumengebietes und der Definition geeigneter Element-Ansatzfunktionen (in *Sound Solve* sind dies isoparametrische, quadratische Tetraeder- und Hexaederelemente) ergibt sich für das Fluid folgendes diskretes Gleichungssystem:

$$(\mathbf{S}_F - \omega^2 \mathbf{M}_F + j\omega \mathbf{A}_F) \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{f}_F \quad (2)$$

Die Matrizen \mathbf{S}_F und \mathbf{M}_F werden auch hier als Steifigkeits- und Massenmatrix bezeichnet. Der Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ enthält die Knotenwerte des Schalldrucks, während die Admittanzmatrix \mathbf{A}_F die Integration über die Randflächen mit gegebener Admittanz und der Lastvektor \mathbf{f}_F die Integration über die angeregten Randflächen des Volumengebietes enthält.

Fluid-Struktur-Kopplung

Um die *ebenen Schalenelemente* zur Simulation bau- und raumakustischer Problemstellungen nutzen zu können, muss die wechselseitige Kopplung des Luftschalls mit den ebenen Flächentragwerken berücksichtigt werden. Abbildung 1 zeigt ein solches Flächentragwerk, dass auf beiden Seiten von Fluidvolumina umgeben ist. Betrachtet man nun die durch die Normalenauslenkung $\mathbf{n}_S^T \mathbf{u}$ der Platte verursachte Luftschallabstrahlung, so kann die schwingende Platte für die Beschreibung des Fluids als angeregte Randfläche $\Gamma_{\bar{v}}$ aufgefasst werden, womit für den Schalldruck an den Grenzflächen zwischen Fluid und Platte folgende Beziehung gilt:

$$\nabla p_1 \cdot \mathbf{n}_{F_1} = \omega^2 \rho_F \mathbf{n}_{F_1}^T \mathbf{u} = \omega^2 \rho_F \mathbf{n}_S^T \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\bar{v}} \quad (3)$$

$$\nabla p_2 \cdot \mathbf{n}_{F_2} = \omega^2 \rho_F \mathbf{n}_{F_2}^T \mathbf{u} = -\omega^2 \rho_F \mathbf{n}_S^T \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\bar{v}} \quad (4)$$

Andererseits kann die Anregung von Plattenschwingungen durch Luftschall ausgehend von der auf die Platte wirkenden Schalldruckdifferenz ($p_1 - p_2$) beschrieben werden. Ist diese Schalldruckdifferenz ungleich Null so resultiert eine harmonische Druckkraft auf die Plattenstruktur, die als Randbedingung für die Platte wie folgt formuliert werden kann:

$$\mathbf{f}_{n_S} = p_1 \cdot \mathbf{n}_{F_1} + p_2 \cdot \mathbf{n}_{F_2} = (p_1 - p_2) \cdot \mathbf{n}_S \quad (5)$$

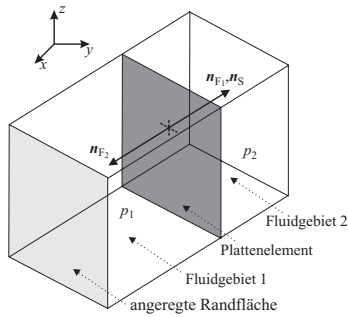


Abbildung 1: Platte mit beidseitig angrenzenden Fluidvolumina und angeregter Randfläche

Aus diesen Kopplungsbedingungen lassen sich für die diskrete Formulierung der FEM die Kopplungsmatrizen C_{SF} und C_{FS} herleiten. Für das in Abb. 1 gezeigte System, das durch eine vorgegebene Schelle auf einer Randfläche in Fluidgebiet 1 angeregt wird, ergibt sich demnach das gekoppelte Gesamtgleichungssystem bei günstiger Knotennummerierung schematisch wie folgt:

Fluid 1	$-C_{SF}$	0	p_1	f_F
$-C_{FS}$	Platte	C_{FS}	\mathbf{u}	$\mathbf{0}$
0	C_{SF}	Fluid 2	p_2	0

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Gesamtgleichungssystems

Verifikation

Zur Verifikation der wechselseitigen Kopplung zwischen Luft- und Körperschall wird eine Konfiguration aus Wand, Luftspalt, Wand und Raum nach GUY [3], die durch eine konstante, harmonische Flächenkraft auf der äußeren Platte angeregt wird, modelliert. Die Berechnungen von GUY basieren auf einer multimodalen Analyse der Konfiguration und sind für den Frequenzbereich bis 200 Hz durch Messungen hinreichend verifiziert. Das Simulationsmodell ist mit seinen Abmessungen sowie den Materialparametern für die Platten in Abbildung 3 dargestellt. Die Messing-Platten sind winklig gelagert, alle übrigen Berandungen werden als schallhart angenommen. Für die FE-Simulationen werden die Platten mit jeweils 10×10 , der Luftspalt mit $10 \times 10 \times 3$ und der würfelförmige Raum mit $10 \times 10 \times 10$ Elementen diskretisiert. Abbildung 4 zeigt die FE-Simulationsergebnisse sowie die Ergebnisse von GUY für die Schalldämmung der Konstruktion, also das Verhältnis der anregenden Flächenkraft zum Schalldruck im Raumvolumen, der sich mittig auf der Raumrückwand einstellt. Insgesamt ergibt sich über den gesamten Frequenzbereich eine sehr gute Übereinstimmung. Durch Vergleich mit den Eigenfrequenzen der Messingplatten lassen sich die Resonanzen bei etwa 86, 390 und 700 Hz den ersten ausbreitungsfähigen Eigenmoden der Platte zuordnen. Die Resonanzen bei 186 und 850 Hz sind auf die Masse-Feder-

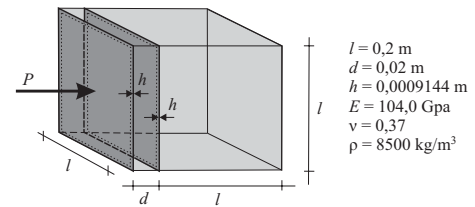


Abbildung 3: Wand-Luftspalt-Wand-Raum Konfiguration nach GUY

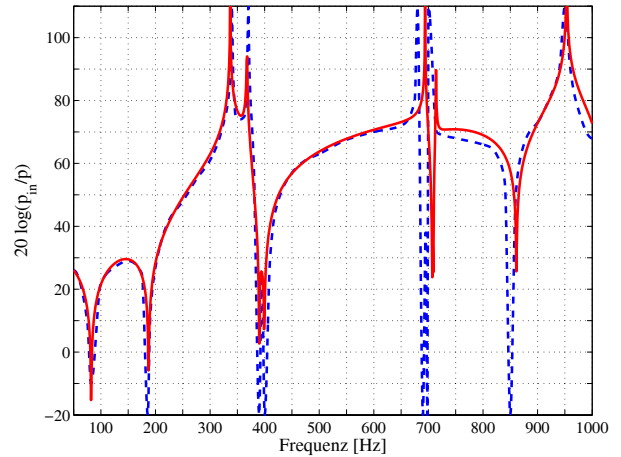


Abbildung 4: Schalldämmung durch Doppelwandkonstruktion

Resonanz der Doppelwand bzw. auf die erste Resonanz des Raumvolumens zurückzuführen. Die FE-Berechnung erfasst somit alle Kopplungseffekte zwischen Luftschall und Plattenstrukturen mit hoher Genauigkeit.

Zusammenfassung

Das FE-Simulationsprogramm *Sound Solve* wurde im Rahmen dieser Arbeit um ein 2D-Struktur-Modell für ebene Flächentragwerke erweitert. Das Modell berücksichtigt die vollständige, wechselseitige Kopplung an den Fluid-Struktur-Grenzflächen und wurde für ein einfaches Modell durch Vergleich mit Ergebnissen nach GUY verifiziert. Durch die Integration des Plattenmodells in *Sound Solve* können somit interessante raum- und bauakustische Probleme sehr viel effizienter als mit dem bereits implementierten 3D-Strukturansatz behandelt werden.

Literatur

- [1] Aretz, M.: Modellierung der wechselseitigen Kopplung von Luftschall mit Plattenstrukturen für raumakustische FEM Simulationen. Diplomarbeit, Inst. f. Techn. Akustik, RWTH Aachen, 2007
- [2] Franck, A.: Simulation von Fluid-Struktur-Kopplungen mit Finite-Elemente-Algorithmen, Diplomarbeit, Inst. f. Techn. Akustik, RWTH Aachen, 2002
- [3] Guy, R.W.: The Transmission of airborne sound through a finite panel, air gap, panel and cavity configuration. *Acustica*, **49**, 323-333, 1981