Darstellung und Berechnung von Körperschall in Maschinenbauelementen mit Hilfe der Wellentheorie

Gerhard Hübner[1], Patrick Kurtz[2]

[1] *Institut für Thermische Strömungsmaschinen, 70569 Stuttgart, Email: huebner@itsm.uni-stuttgart.de*
[2] *Bundesanstalt für Arbeitsschutz und Arbeitsmedizin, Email: kurtz.patrick@baua.bund.de*

Einleitung

Für Aufgaben der Luftschall-Emissionsvorhersage benötigt man vom Körperschall der schwingenden Bauelemente zunächst nur die oberflächennormalen Schnellekomponenten nach Betrag und Phase. Diese Daten genügen zusammen mit der Geometrie des Festkörpers um damit anschließend die Berechnung der Luftschallabstrahlung durchführen zu können. Körperschalldaten des Bauteil-Inneren - Schnelle und Spannungen – sind ferner für die Bestimmung von Energie- und Schallleistungsgrößen gefragt. Diese Größen werden für die Körperschall-Emission insbesondere an Kontaktflächen von einem Bauelement oder Bauelement-Abschnitt zu einem anderen gebraucht. Die Energiegrößen finden ferner Verwendung als „Hilfsgröße" im Berechnungsgang der auf den Lagrange-Gleichungen beruhenden Grundlage der Methode der finiten Elemente (FEM) sowie bei der Statistischen Energieanalyse (SEA). Zielgröße dieser Rechenverfahren für die Schallabstrahlungsbestimmung sind aber auch hier nur die oberflächennormalen Schnellenkomponenten der Bauelemente.

Der dreikomponentige Verschiebungsvektor **s** des Körperschalls genügt im unbegrenzt großen dreidimensionalen Kontinuum bekanntlich der echten Wellengleichung

$$D \text{ grad div } \mathbf{s} - G \text{ rot } \mathbf{s} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} - \mathbf{F} \qquad (1)$$

die zusammen mit den für ein endlich großes Bauteil individuell vorzugebenden Rand- und Übergangsbedingungen die Grundlage für alle, insbesondere das Bauteil-Innere erfassende 3D-Körperschall-Berechnungsverfahren ist. Das so behandelte Körperschallfeld, fordert für jede Bauteilgestalt neue Programmierungen und liefert weit mehr Daten als im allgemeinen für die zur Luftschallemissionsberechnung benötigt sind, ist damit dafür redundant und auch rechnerisch zu aufwendig.

Einfacher und für die Bestimmung der von Körperschall verursachten Luftschallemission von Stäben (Balken) und Schalen und weniger redundant sind die quasi-ein und quasi-zweidimensionalen Körperschallberechnungsverfahren, die unter bestimmten Bedingungen zulässig sind und auch ingenieursmäßig sehr häufig Anwendung finden. Kern dieser Verfahren ist die Annahme einer senkrecht zu Oberfläche linearen Abhängigkeit der relevanten Feldgröße im Festkörper-Inneren, was im allgemeinen im Bereich von Körperschallwellenlängen zutrifft, die größer als die Querabmessung/Dicke der durch Balken und Schalen beschriebenen Bauelemente sind. Daraus ergibt sich eine obere Frequenz-Begrenzung des Anwendungsbereichs, die aber bisher durch Vernachlässigung der sogenannten „Nebeneinflüsse" (siehe nächster Abschnitt) zu restriktiv ist.

Ein Vergleich der Rechenergebnisse unter Einbeziehung der „Nebeneinflüsse" zeigte für die Bestimmung der Eigenfrequenzen geschlossener Kreisringe verschiedener Dicke mit entsprechenden Messwerten und bei Zulassung einer höchsten Eigenfrequenzabweichung von 2% eine Anwendbarkeit der WT Beschreibung bis zu einem Verhältnis der Körperschallwellenlänge λ_k zur Ringdicke h bis $\lambda_k / h \geq 2$ [1]. Angewendet auf Biegewellen in geraden Balken aus Stahl können danach diese bis f_{grenz}= 10 kHz für Balken mit bis zu einer Dicke h von rund 0,3 m in meist ausreichender Weise berechnet werden.

Eine einheitliche Beschreibung des Körperschalls in stabförmigen Bauteilen verschiedener Gestalt mit Hilfe der Wellentheorie

Im Rahmen des zur Verfügung stehenden Platzes kann die wellentheoretische (WT) Beschreibung des Körperschalls in beliebig gestalteten Balken hier nur mit ihren wesentlichen Voraussetzungen, den Unterschieden zu den „klassischen" Körperschallbeschreibungen und den resultierenden Grundgleichungen gegeben werden. Zu Einzelheiten wird auf [1] und [2] und die dortige Literatur verwiesen.

Unterschiede der WT zur üblichen, „klassischen" quasi-eindimensionalen Körperschallbeschreibung in Balken bestehen in der Handhabung des Verschiebungsvektors **s** und des Beanspruchungsvektors **q** sowie in der ausdrücklich notwendigen Zulassung von Termen, die üblicherweise als „Nebeneinflüsse" bezeichnet und häufig „klassisch" vernachlässigt werden. Die Verschiebungs-Vektoren (Motoren im Mieses´schen Sinn) umfassen hier die 3 Translationen (*u, v, w*) eines Zentrallinienpunktes sowie die 3 Winkeldrehungen (α, β, γ) der Querschnittsfläche. Analog setzt sich der WT-Beanspruchungsvektor aus Quer- und Longitudinalkräften (*Q, S, T*) und den 3 Momenten (*B, G, H*) zusammen und vermeidet damit den sonst üblichen auf eine einzelne, „ad hoc" herausgehobene Komponente praktizierten „Tunnelblick".

$$\mathbf{s}=(\mathrm{u,v,w},\alpha,\beta,\gamma);\ \mathbf{q}=(\mathrm{Q,S,T,B,G,H});\ \mathbf{p}=(\mathrm{X,Y,Z,K,L,M}) \quad (2)$$

p beschreibt dabei ferner die von außen einwirkenden Kräfte/Momente.

Hiermit lassen sich die durch „Nebeneinflüsse" ergänzten Grundgleichungen in direkter Fortführung der zum Beispiel von Love (Dover Publ., NY, 1948) bekannten Beziehung schreiben als

Gleichgewichtsgleichung Materialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} = B_{12}\mathbf{q} + B_{22}\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} - p \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} = B_{11}\mathbf{s} + B_{12}\mathbf{q} \quad (3)$$

Die darin enthaltenen Matrizen beschreiben in diagonaler Form Trägheiten und Kehrwerte von Steifen je Längeneinheit (B_{22}, B_{12}) sowie geometriebestimmte, bis auf einen Restanteil schiefsymmetrische Koppelmatrizen ($B_{21} = B_{11}^{-1}$) (Einzelheiten s. [1], [2]).

Aus den Gln. (3) ergibt sich eine sämtliche Balkengestalten, also für Balken verschiedenster Zentrallinien und Querschnittsdickenvariation, einheitlich umfassende echte Wellengleichung

$$A_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial s^2} + B_1\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} + C_1\mathbf{s} = D_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} - \mathbf{p} \qquad \text{wobei,} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= B_{12}^{-1};\; B_1 = -B_{12}^{-1}B_{11} - B_{21}B_{12}^{-1} + \frac{\partial B_{12}^{-1}}{\partial s}; \\ C_1 &= B_{21}B_{12}^{-1}B_{11} - \frac{\partial}{\partial s}\left(B_{12}^{-1}B_{11}\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Die Darstellung der Wellengleichung (4) ist allerdings zwingend daran gebunden, dass die Matrix B_{12} nicht singulär ist, also für diese Diagonalmatrix sämtliche Elemente ungleich Null sind, die Schubsteifen also endlich groß angesetzt werden und somit die entsprechenden „Nebeneinflüsse“ berücksichtigt sind.

Aus den Gln.(3) leitet sich der Energiesatz für den Balkenkörperschall ab mit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{E_{kin} + E_{pot}\right\} = -\frac{\partial}{\partial s}P + P_a \quad \text{ab, wobei} \qquad (6)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left\langle D_1\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right\rangle;\; E_{pot} = \frac{1}{2}\left\langle D_2\mathbf{q}, \mathbf{q}\right\rangle \qquad (7)$$

und insbesondere die durch die Balken durchtretende Körperschallleistung P sowie die von äußeren Kräften/ Momenten je Längeneinheit aufgebrachte Leistung P_a dargestellt sind durch

$$P = -\left\langle \mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right\rangle;\; P_a = \left\langle \mathbf{p}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right\rangle. \qquad (8)$$

Ein wesentlicher weiterer Vorteil der WT ist die Darstellung der Körperschallleistung P in Fortführung der Gl. (8) allein durch den Verschiebungsvektor **s** und dies mit nur Ableitungen 1. Ordnung nach Zeit und Ort. Dazu wird aus Gl. (3) $\mathbf{q} = B_{12}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s} - B_{11}\mathbf{s}\right)$ verwendet und aus Gl. (8) folgt

$$P = -\left\langle B_{12}^{-1}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right\rangle + \left\langle B_{12}^{-1}B_{11}\mathbf{s}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right\rangle. \qquad (9)$$

Diese Darstellung niedrigen Ableitungsgrades setzt wiederum die Nichtsingularität von B_{12}^{-1}, also die WT-eigene Zulassung aller Nebeneinflüsse voraus. Die entsprechende klassische Beschreibung verlangt statt dessen höhere Ableitungen und gemischte Ort-Zeit-Ableitungen (siehe zum Beispiel: Pavic, J. Sound Vibr. 49).

Bei allgemein gestalteten Stäben, z.B. für einen Schraubenbalken, sind die Matrizen von 6. Ordnung, die für einfachere Stabgestalten unter Beibehaltung der zuvor beschriebenen Gleichungen als Folge von Entkopplungen in Matrizen niedrigerer Ordnung zerfallen. Durch die Übergeordnete, einheitliche Beschreibung benötigt man nur einmalig hergeleitete Lösungsgleichungen. Die maschinenspezifische Aufgabe braucht dann nur noch die Eingabe zugehöriger Kennmatrizen.

Wellentheoretische Beschreibung des Körperschalls von schalenförmigen Bauteilen

Der bekannten „klassischen“ quasi-zweidimensionalen Beschreibung des Körperschalls in Schalen liegen uneinheitlich partielle Differentialgleichungen verschiedener, höherer Ordnung zugrunde, so den Biegeschwingungen ebener Schalen (Platten) von 4., den der zylindrischen Schalen von 6. Ordnung. Mit einer konsequenten Übertragung der zuvor für die verschieden gestalteten Stäbe angewandten Prinzipien der Wellentheorie auf die Gruppe verschieden gestalteter zweidimensionaler Festkörper können durch Zulassung von „Nebeneinflüssen“, Handhabung der den Schwingungszustand vollständig kennzeichnenden Vektoren – Vermeidung des „Tunnelblicks“ – derartige Bauteile auch durch Differentialgleichungen für die Verschiebungs- (und Beanspruchungs-) Vektoren von zweiter Ordnung nach Zeit und Ort beschrieben werden. Im Rahmen diesen Beitrages lassen sich hierzu nur Literaturhinweise (6. ICA Lüttich, paper L17; 7. ICA, Tokyo, paper G-1-10) und einige Beispiele angeben. Die Biege und Biege-Dehnschwingungen ebener Platten, Kreiszylinderschalen und Kugelschalen können danach sämtlich durch Wellengleichungen des Typs

$$E_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x_1^2} + E_2\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x_2^2} + E_3\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x_1\partial x_2} + F_1\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x_2} + F_3\mathbf{s} = H\frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} + \mathbf{p}$$

beschrieben werden. Für die ebene Platte ist dabei die Koordinate x_1=x, x_2=y, für die Kreiszylinderschale x1=s die Bogenlänge, x2=z; für die Kugelschale $x_1=R\cdot\vartheta$, $x_1=R\cdot\varphi\sin\vartheta$ jeweils bezogen auf die neutrale Schicht. Der Verschiebungsvektor umfasst hier im allgemeinen Fall 5 Komponenten und die Matrizen E1...H sind dementsprechend auch von 5. Ordnung mit Reduktion auf niedere Ordnungen für einfacher gestaltete Schalen (ebene Platte, Zylinderschalen) und mit einem analogen physikalischen Inhalt wie bei dem WT-Balken. Entsprechende Gleichungen für Schallintensität und Energie stellen sich ähnlich wie bei dem Balken durch Ableitungen 1. Ordnung dar.

Literatur

[1] Hübner, G.: Ein Beitrag zur mathematischen Behandlung des erzwungenen Körperschalls in allgemein gestalteten Stäben mit Anwendungen. Dissertation TU Berlin Berichter: Prof. Dr. L. Cremer, Prof. Dr. phil. E. Mohr

[2] Kurtz, P.: Ein Beitrag zur Bestimmung der Körperschallleistung in allgemein gestalteten Balken; Dissertation Universität Stuttgart; 2001