Überblick über Integralkernbezogene Entwicklungen in der BEM

Dipl.-Ing. Siegfried Seipelt[1], Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller[2]

[1] *Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, 80333 München, Deutschland, Email: siegfried.seipelt@bv.tum.de*

[2] *Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, 80333 München, Deutschland, Email: gerhard.mueller@bv.tum.de*

Einleitung

Analytische Lösungen für Differentialgleichungen sind die eleganteste Art physikalische Problemstellungen zu lösen. Für die überwiegende Anzahl komplexer Problemstellungen ist diese Vorgehensweise aber nur in Ausnahmefällen möglich. Mit steigender Komplexität ist die Zuhilfenahme numerischer oder semianalytischer Verfahren, in welche die Randelementmethode eingeordnet werden kann, sinnvoll. Die direkte Randelementmethode stellt wohl das „analytischste" aller Näherungsverfahren dar. Für Außenraumprobleme sowie im Rahmen der Analyse infiniter Kontinua wird diese Eigenschaft der exakten Erfüllung der Differentialgleichungen im Gebiet und lediglich einer Näherung an den Rändern, besonders deutlich. Hinzu kommt, dass die Diskretisierungsordnung im Vergleich zu den Finiten Element Verfahren um eine Dimension verringert wird.

Im Folgenden wird ein knapper Überblick über die wesentlichen „Integralkernbezogenen" Entwicklungen in der Randelementmethode gegeben. Im Einzelnen sollen dabei die symmetrischen Galerkin-Ansätze, Die Dual Reciprocity-Method, Hybride Randelementverfahren und die Clusteringmethoden behandelt werden. Abschließend wird ein knapper Einblick in die Fourier BEM, mit den zugehörigen Distributionsansätzen gegeben und eine Möglichkeit zur Effizienzsteigerung durch die Wahl von erweiterten Grundlösungen aufgezeigt.

Kurzer Überblick über die wesentlichen Entwicklungen in der Randelementmethode

Ausgangspunkt für die Formulierung der Randintegralgleichungen ist immer die „Schwache Formulierung" des zugrundeliegenden Problems. Durch partielle Ableitung und Anwendung des Gauß´schen Integralsatzes wird die grundlegende Beziehung, die Reziprozitätsbeziehung, Gl.(1), erhalten.

$$\int_\Omega u^*(*)Lu\,d\Omega + \int_\Gamma u^*(*)q\,d\Gamma = \int_\Omega Lu^*(*)u\,d\Omega + \int_\Gamma q^*(*)u\,d\Gamma \qquad (1)$$

Aufbauend auf dieser, auch als Satz von Betti bekannten Beziehung, können die Integralgleichungen für die Gebietsränder aufgestellt und diese Randintegralgleichungen mittels verschiedener Ansatzfunktionen diskretisiert werden. Für die Algebraisierung durch Fehlergewichtung stehen dann sowohl Kollokationsverfahren als auch das aus der Variationsrechnung bekannte Galerkin-Verfahren zur Verfügung.

a) Symmetrische Galerkin-Ansätze

Im Allgemeinen sind die Matrizen der Randelementmethode weder symmetrisch noch positiv definit. Durch die Anwendung des Galerkin Verfahrens, welches sich durch eine zusätzliche Gewichtung (Integration) mit der jeweils im Sinne eines Arbeitsansatzes dualen Testfunktion auszeichnet, kann in Verbindung mit einer Randintegralformulierung sowohl für u(**x**) als auch für q(**x**), welche in Gl. (2) dargestellt ist sowie der Aufspaltung der bekannten und der unbekannten Randgrößen eine symmetrische Steifigkeitsmatrix erhalten werden [1][4].

$$\int_\Gamma \phi_u^j(x)\,C\,q(x)d\Gamma = \int_\Gamma \phi_u^j(x)\sum_i^{Nq} q^i \int_\Gamma \phi_q^i(y)\,q^*(x-y)d\Gamma d\Gamma$$
$$-\int_\Gamma \phi_u^j(x)\sum_i^{Nu} u^i \int_\Gamma \phi_u^i(y)\frac{\partial q^*}{\nu}(x-y)d\Gamma d\Gamma \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} V & -K \\ K^T & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_u \\ r_q \end{pmatrix}$$ (symmetrische, positiv definite Steifigkeitsmatrix)

b) Duale Reziprozität

Für viele in der Realität auftretende Problemstellungen liegen nichtlineare Diffenentialoperatoren vor, für die keine Grundlösungen bekannt sind. Diese sind jedoch für die Formulierung der klassischen Randintegralmethoden von entscheidender Bedeutung. Durch die Aufspaltung des Differentialoperators in einen bekannten, linearen Operator sowie den additiven nichtlinearen Restoperator können die Integralgleichungen in der gewohnten Weise, jedoch nunmehr mit einem generalisierten Lastterm Gl.(3), welcher die additiven nichtlinearen Operatoranteile enthält, formuliert werden [3]. $L^N u = p \quad L u = p - L^{NN} u$

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Gamma (GuS^*u^* - Su\,G^*u^*)d\Gamma - \int_\Omega (b - L^{NN}u)u^*\,d\Omega \qquad (3)$$

Zuletzt wird das störende Bereichsintegral des generalisierten Lastterms durch die zweimalige Anwendung der Reziprozitätsformulierung und die gezielte Wahl von gewichteten Näherungsquellfunktionen beseitigt.

c) Hybride Randelementformulierungen

Neben der bekannten Art der Formulierung der Randelementgleichungen ist auch eine variationsbezogene Randelementformulierung möglich. Aufbauend auf den bekannten Grundprinzipien werden Mehrfeldfunktionale mit getrennten Ansatzfunktionen am Rand und im Gebiet formuliert. Damit wird die Anforderung an die Ansatzfunktionen, sowohl die Differentialgleichung im Gebiet als auch die Bedingungen an den Rändern zu erfüllen, abgeschwächt. Die Einhaltung der Bedinungen am Rand wird anschließend über ein erweitertes Lagrange-Funktional bzw. über Lagrange´sche Multiplikatoren in dem Variationsfunktional ergänzt. Die verbleibenden Gebietsintegrale können üben den Ansatz von gewichteten, problembezogenen Fundamentallösungen eliminiert werden.

d) Clusteringverfahren (Fast Multipole)

Der Aufwand für die Lösung der in der BEM auftretenden Matrix-Vektor-Operationen ist quadratisch $O(N^2)$. Wenn, wie für degenerierte Kerne möglich, eine Aufspaltung des Integralkernes in eine Summe von Produkten, jeweils nur von einer Variablen abhängiger Funktionen möglich ist, so könnte dieser Aufwand auf ein lineares Maß reduziert werden (vgl.[4]). Die Variablentrennung der Kerne gelingt also nur als Reihenentwicklung. Für weit von der Auswertungsstelle entfernt liegende Quellpunkte ist diese Approximation im Allgemeinen zulässig. Für nahe am Auswertungspunkt liegende Quellpunkte (Randelemente) ist die Näherung nicht zulässig.

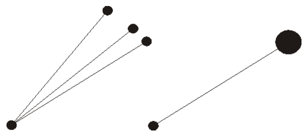

Abbildung 1: **zulässige Fernfeldapproximation**

Daher ist im Rahmen der Kernapproximation zwischen einer exakten Nahfeldauswertung und einer genäherten Fernfeldauswertung zu unterscheiden [4].

$$\tilde{w}_e = \tilde{w}_{exakt,Nahfeld} + \tilde{w}_{approx,Fernfeld}$$

Die effektive Unterscheidung in Fern- und Nahfeldbereiche kann über eine hierarchische Struktur (Panel-Cluster), welche über die Randelemente gebildet wird, realisiert werden. Über die Wahl eines Grenzradius, welcher die Cluster einer definierten Stufe erfasst, kann ein Nahfeldbereich von den jeweiligen Fernfeldbereichen abgespalten werden.

Fourier BEM

Wie bereits beschrieben, sind für verschiedene physikalische Problemstellungen (geschichtete Strukturen) die im Rahmen der direkten Randelementmethode erforderlichen Grundlösungen i.A. nicht bekannt. Für alle linearen physikalischen Probleme kann jedoch die fouriertransformierte Funktion ermittelt werden. Durch den Übergang vom Originalraum in den Bildraum gehen allerdings, aufgrund der fehlenden Lokalisierungseigenschaften der Fouriertransformation die Bereichsinformationen verloren [2]. Die Fouriertransformierte ist im Gegensatz zur Originalfunktion auf ganz R^n definiert. Die notwendige Beschränkung auf die zu betrachtenden Gebiete kann aber durch spezielle Cut-Off-Distributionen erreicht werden.

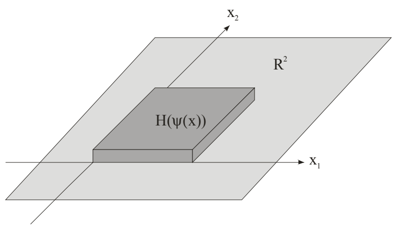

Abbildung 2: **Rechteckgebiet auf R^2**

Die Randintegralgleichungen sind in der Fourier BEM über die grundlegenden Beziehungen der Distributionentheorie, Gl. (4), herzuleiten.

$$\Delta\{\chi u\} = \chi\Delta u + 2\nabla\chi\nabla u + u\nabla\chi \quad (4)$$

Wie aus der nachfolgenden Reziprozitätsformulierung zu erkennen ist, erfolgt die Randbeschränkung des letzten Integrales auf der rechten Seite über die Beschränkung des Trägers des Gradienten der zugehörigen Cut-Off-Distribution, Gl. (5) [2].

$$\int_{R^n} \chi u \Delta v \, dy = -\int_{R^n} v \chi f \, dy - \int_{R^n} [v \nabla u - u \nabla v] \nabla \chi \, dy \quad (5)$$

Formal entspricht die obige Beziehung aber derjenigen aus der direkten BEM bekannten. Über das Parseval´sche Theorem ist die Übereinstimmung der algebraischen Gleichungssysteme aus traditioneller BEM und Fourier BEM sichergestellt.

Möglichkeiten für die Wahl von Grundlösungen

Für die Lösung komplexer Aufgabenstellungen kann es vorteilhaft sein, bereits bei der Herleitung der Fundamentallösungen einzelne Randinformationen mit zu berücksichtigen. So kann z. B. durch die Herleitung von Grundlösungen für den Halbraum mit bewegter Sinuslast der Diskretisierungsaufwand auf zusätzliche geometrisch schwierige Bereiche beschränkt werden. Zudem ist durch die Wahl weitestgehend analytischer Grundlösungen, welche nahe an die Greensche Funktion heranreichen, eine Konvergenzsteigerung sichergestellt.

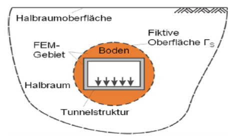

Abbildung 3: **Halbraum mit Tunnel und bewegter Last**

Mittels der Integraltransformationsmethoden (ITM) können für eine große Anzahl von regelmäßigen Strukturen derart erweiterte Grundlösungen ermittelt und somit die Randelementmethode weitestgehend analytisch formuliert werden. Insbesondere zur Verifizierung und Beurteilung neuer, approximativer numerischer Verfahren erscheinen derartige Fundamentallösungen als sinnvoll.

In diesem Kontext sind auch globale spektrale Ansatzfunktionen zu nennen, welche die Kopplung von Randelementlösungen mit analytischen Lösungen ermöglichen [5].

Literatur

[1] Hartmann F.: Methode der Randelmente. Springer Verlag, Berlin, 1987.

[2] Duddeck F.M.E.: Fourier BEM. Springer Verlag, Berlin, 2002.

[3] Gaul L., Kögl M., Wagner M.: Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, Springer Verlag, Berlin, 2003.

[4] Of G.: BETI Gebietszerlegungsmethoden mit schnellen Randelementverfahren und Anwendungen, Doktorarbeit, Fakultät für Physik und Mathematik, Technische Universität Stuttgart.

[5] Müller G.: „Ein Verfahren zur Kopplung der Randelementmethode mit analytischen Lösungsansätzen“. „Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München“, Heft 2/93, (1993).