

## Numerische Modalanalyse einer Blockflöte

Stefanie Fuß<sup>1</sup>, Steffen Marburg<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut für Festkörpermechanik, TU Dresden, 01062 Dresden, Deutschland, Email: fuss@ifkm.mw.tu-dresden.de

### Einleitung

Für das Modell einer Blockflöte werden Modalanalysen aller spielbaren Töne durchgeführt, ausgenommen der Töne mit halbgeöffneten Tonlöchern. Die Ergebnisse der numerischen Modalanalyse werden mit den Werten aus der MIDI-Tabelle verglichen.

Bei der untersuchten Blockflöte handelt es sich um eine Sopranblockflöte mit deutscher Griffweise und Stimmung auf 442 Hz.

### Akustisches Abstrahlproblem

Unter der Annahme harmonischer Zeitabhängigkeit des Drucks

$$p(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \{ p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \} \quad (1)$$

lässt sich das Randwertproblem durch die Helmholtzgleichung

$$-\Delta p(\mathbf{x}) - k^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

die Neumann-Randbedingung auf dem Flötenrand

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{g}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3)$$

sowie die Sommerfeld-Abstrahlbedingung

$$R \left\{ \frac{\partial p}{\partial R} - ikp \right\} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad R \rightarrow \infty \quad (4)$$

beschreiben [3].

Das Fluid innerhalb und im Nahfeld der Blockflöte wird durch finite Elemente (FE) beschrieben, während infinite Elemente (IE) genutzt werden, um das Verhalten im Fernfeld abzubilden. Die Sommerfeld-Abstrahlbedingung gewährleistet hierbei, dass in großer Entfernung vom abstrahlenden Körper nur nach außen propagierende Komponenten existieren. Als finite Elemente werden Lagrange Tetraederelemente zweiter Ordnung und als infinite Elemente komplex konjugierte Astley-Leis Elemente [1, 2] verwendet.

Das gesamte Problem, bestehend aus finiten und unendlichen Elementen, kann man in Matrixschreibweise darstellen

$$(\mathbf{K} - ik\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad (5)$$

mit  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{M}$  als Steifigkeits-, Dämpfungsmatrix und Massenmatrix. Die Matrizen sind unsymmetrisch und unabhängig von der Wellenzahl  $k$ . Die Dämpfungsmatrix enthält nur Einträge für die infinite Elemente. Im betrachteten Eigenwertproblem ist der Vektor  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

### Modalanalyse

Zur Berechnung der Eigenvektoren und Eigenfrequenzen wird das in Gleichung (5) dargestellte quadratische Eigenwertproblem in die folgende Zustandsraumbeschreibung umgeformt [4]

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

mit  $\Phi = \lambda\Psi$  und  $\lambda = -ik$ . Für die Lösung dieses linearisierten Eigenwertproblems wird es zunächst in die Standardformulierung transformiert

$$\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Das dreidimensionale FE-Fluidmodell der Blockflöte wird in Ansys 11.0 erstellt und in einem, am Institut für Festkörpermechanik der TU Dresden entwickelten, Fortran90 Code eingelesen. In diesem Programm werden die infinite Elemente hinzugefügt und die Modalanalyse durchgeführt.

Die Modalanalyse erfolgt für alle spielbaren Töne, ausgeschlossen derer mit halbgeöffneten Tonlöchern. In diesem Artikel werden exemplarisch die Ergebnisse der Töne  $c''$ ,  $b''$  und  $d'''$  präsentiert. In Abbildungen 1, 2 und 3 sind jeweils der Grundton und erste Oberton von  $c''$ ,  $b''$  und  $d'''$  dargestellt.

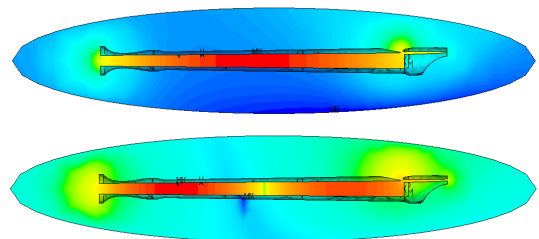


Abbildung 1:  $c''$ : Grundton (oben) und 1. Oberton (unten).

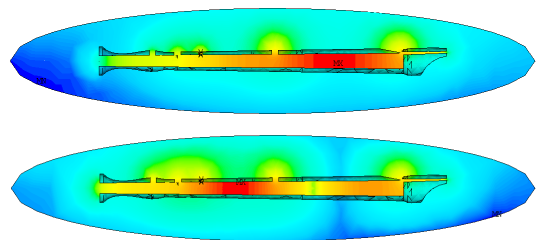


Abbildung 2:  $b''$ : Grundton (oben) und 1. Oberton (unten).

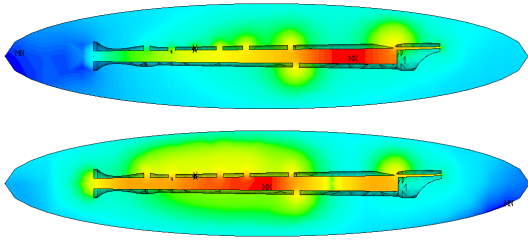


Abbildung 3:  $d'''$ : Grundton (oben) und 1. Oberton (unten).

Um Aussagen über das Konvergenzverhalten der berechneten Frequenzen treffen zu können, werden die numerisch ermittelten Werte mit denen aus der MIDI-Tabelle, nach Umrechnung auf 442 Hz, verglichen. Die numerische Modalanalyse dieser Töne erfolgt an je acht verschiedenen Netzen mit unterschiedlichem Freiheitsgrad. Die exakten Werte aus der MIDI-Tabelle betragen

$$\begin{aligned} c'' &= 525.630 \text{ Hz} \\ b'' &= 936.565 \text{ Hz} \\ d''' &= 1179.998 \text{ Hz} . \end{aligned} \quad (8)$$

Die Abbildungen 4–6 stellen die Konvergenz des jeweiligen Grundtons über den Freiheitsgrad dar.

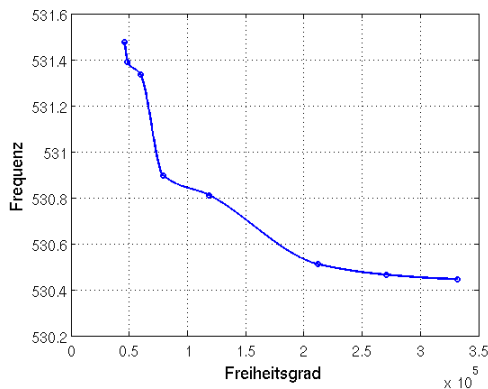


Abbildung 4: Konvergenz von  $c''$ .

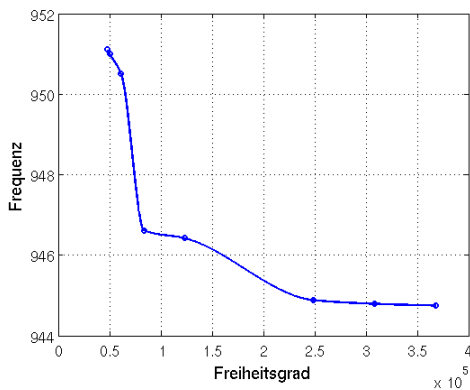


Abbildung 5: Konvergenz von  $b''$ .

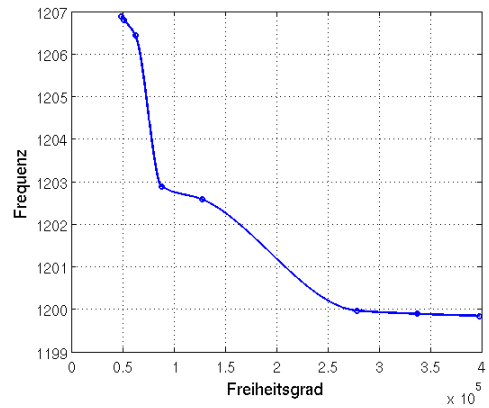


Abbildung 6: Konvergenz von  $d'''$ .

Auf den ersten Blick weisen alle drei Töne ein ähnliches Konvergenzverhalten auf, aber bei genauerem Hinschauen lässt sich erkennen, dass bei Ton  $c''$  zwischen größten und feinsten Netz nur 1 Hz liegt, während bei den beiden anderen Tönen die groben Netze deutlich schlechtere Ergebnisse liefern als die feinen Netze.

### Zusammenfassung und Ausblick

Die Untersuchungen des Konvergenzverhaltens verschiedener Töne haben gezeigt, dass sich die Eigenfrequenzen an die erwarteten Frequenzen aus der MIDI-Tabelle von oben annähern. Die Differenz bis zum exakten Wert beträgt jedoch mehrere Herz. Dieses Ergebnis ist für ein Musikinstrument zu ungenau. Wir vermuten, dass diese Abweichung auf der Vernachlässigung des Strömungsprofils innerhalb der Blockflöte basiert.

Beim Spielen einer Blockflöte wird die Luftsäule im Inneren des Instruments durch den eingebrachten Luftstrom zum Schwingen angeregt. Der Spieler ist in der Lage die Tonfrequenz durch Variation des Anblasdrucks zu beeinflussen und damit Feinabstimmungen im Klang zu erreichen. Aus diesem Grund soll in weiteren Berechnungen das charakteristische Strömungsprofil in der Flöte bei der Modalanalyse berücksichtigt werden.

### Literatur

- [1] Astley, R. J.: Mapped spheroidal elements for unbounded wave problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 41 (1998), S. 1235–1254
- [2] Astley, R. J.; Macaulay G. J.; Coyette, J.-P.: Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering. *J. Sound Vib.* 170 (1994), S. 97–118
- [3] Ihlenburg, F.: *Applied mathematical sciences Bd. 132: Finite element analysis of acoustic scattering.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998
- [4] Ruge, P.: Eigenvalues of damped structures: Vector iteration in the original space of DOF. *Computational Mechanics* 22 (1998), S. 167–173