# Akustische Strahlungskräfte bei Festkörperwellen (I)

O. Bschorr[1], J. Starke[2]

[1] *Aeroakustik, München* [2] *Astrium GmbH, Bremen*

## Einleitung

Aufgabe ist, den Strahlungsdruck und die Strahlungskraft bei Festkörperwellen, speziell von (i) longitudinalen und (ii) transversalen Raumwellen zu bestimmen. Dazu wird auf (iii) kleine – genauer: infinitesimale – Schwingungsausschläge eingeschränkt, um die Vorteile der linearen Theorie mit Superposition und Orthogonalität nutzen und um auf die diffizile Unterscheidung von Euler- und Lagrange-Beschreibung verzichten zu können. (iv) Der Strahlungsdruck als ein nichtlinearer Effekt wird *a posteriori* durch eine Störungsrechnung eingeführt und dazu nur die lokalen Approximationen der (v) Kräfte- und der (vi) Wellengleichung benützt. (vii) Um den Drehimpuls von Transversalschwingungen zu erfassen, werden wie beim Cosserat-Kontinuum auch antisymmetrische Spannungstensoren zugelassen. Nur um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wird auf (viii) schwache Wellendämpfung eingeschränkt.

Mit den Vereinbarungen (i) – (viii) werden via Störungstheorie die Strahlungskräfte berechnet und diese auf ein Tensorpotential zurückgeführt.

## Störungsrechnung

*(i). Longitudinalwelle.* Zugrunde liegt ein elastischer, im allgemeinen Fall inhomogener und anisotroper Festkörper. An einem beliebigen Punkt **O** (x = 0, Fig.1) mit der Dichte $\rho$ [kg/m$^3$] und der longitudinalen Wellengeschwindigkeit $c_L \rightarrow$ c [m/s] bestehe die elastische Auslenkung **s** = **s**(x,t) [m] und unterliege dem Kräftegleichgewicht (v)

(1) $\rho\,[\mathbf{s}^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s}] = 0$

[(#)° = d(#)/dt. Da die Zeit t [s] skalar ist, besteht keine Verwechslung mit dem Vektor **t** [-]. Dasselbe gilt für die Abszisse x [m] und das vektorielle Produkt **x**] Eine in **t**-Richtung laufende Longitudinalwelle mit der Kreisfrequenz $\omega$ [rad/s], der Wellenzahl k [rad/m], der Wegamplitude $\mathbf{s_t} = s_t\mathbf{t}$ [m] und dem Verlustfaktor $\eta$ [-] erfülle in **O** die Wellengleichung (vi)

(2) $\mathbf{s_I} := \mathbf{s}(x,t) = \mathbf{s_t}\exp(-\eta kx/2)\sin(\omega t - kx)$

Gemäß der Störungstheorie (iv) wird die lineare Erstlösung $\mathbf{s_I}$ benützt um mit dem Konvektivglied d(#) = $\mathbf{s_I}\cdot\nabla$(#) nach

(3) $\mathbf{s_{II}}^{\circ\circ} = \mathbf{s_I}^{\circ\circ} + \mathbf{s_I}\cdot\nabla\mathbf{s_I}^{\circ\circ}$

(4) $\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s_{II}} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s_I} + \mathbf{s_I}\cdot\nabla\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s_I}$

die verbesserte Zweitlösung $\mathbf{s_{II}}$ zu bestimmen. Setzt man $\mathbf{s_{II}}$ in die Kräftegleichung (1), so erhält man für die in **O** herrschenden quadratischen Störkräfte **f**(t) [N/m$^3$].

(5) $\mathbf{f}(t) = \rho\,[\mathbf{s_I}\cdot\nabla(\mathbf{s_I}^{\circ\circ} - c^2\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s_I})]$

Bei der Ausrechnung von (5) werden nur die linearen Störglieder ($\nabla\mathbf{s_t}$, $\mathbf{s_t}^\circ$,$\eta$) berücksichtigt und die Ableitungen 2. Ordnung ($\nabla\nabla\mathbf{s_t}$, $\mathbf{s_t}^{\circ\circ}$,$\eta^2$) ausgeschlossen; die Terme 0.ter Ordnung ($\mathbf{s_t}$) heben sich erwartungsgemäß auf. Die Einordnung der $\eta$- bzw. $\eta^2$-Terme erfolgte gemäß Annahme (viii). Im Weiteren wird anstelle der Amplitude $s_t$ die effektive Schnelle $v = \omega s_t/\sqrt{2}$ [m/s] und die Energiedichte e [J/m$^3$]

(6) $e = e_{kin} + e_{pot} = 2\,e_{kin} = \rho v^2$

eingeführt. Der Gleichdruckanteil, das Zeitmittel, $\mathbf{f} = \langle\mathbf{f}(t)\rangle_t$ stellt die gesuchte Strahlungskraft **f** [N/m$^3$] dar. Für die in (2) beschriebene longitudinale Wanderwelle wird

(7) $\mathbf{f} := \mathbf{f_{1\text{-}5}} = \mathbf{t}\,\eta ke + \mathbf{t}\,e^\circ/c + \mathbf{t}e/R_G + \mathbf{n}\,e/R_K + \mathbf{tt}\cdot\nabla e$

(8-10) $R_G = (\mathrm{div}\,\mathbf{t})^{-1}$ $\quad R_K = |\mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t}|^{-1}$ $\quad R_T = |\mathbf{t}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{t}|^{-1}$

Diese Rechnung auf Transversalwellen übertragen, liefert dieselben Kräfte und beide Fälle lassen sich auf ein gemeinsames Tensorpotential reduzieren. Deshalb wird die Diskussion der $\mathbf{f_{1\text{-}5}}$-Kraftkomponenten und der aus der Frenet-Theorie der Raumkurve kommenden Gauß-, Krümmungs- und Torsionsradien $R_G$, $R_K$, $R_T$ [m] zurückgestellt.

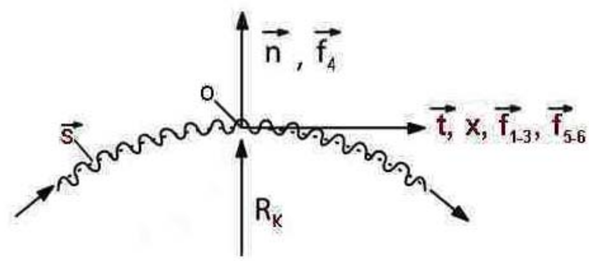


**Abbildung 1:** Verlauf einer Festkörperwelle mit der elastischen Auslenkung **s** = **s**(x,t) am Bezugspunkt **O** mit den Koordinaten **t**, **n**, **b** des begleitenden Dreibeins. Der einsnormierte Tangentenvektor **t** mit der von **O** aus gezählten Abszisse x hat die Richtung der Welle; dabei ist $\nabla x = \mathbf{t}$. Die Normale **n** verläuft nach der Frenet´schen Theorie der Raumkurve mit $\mathbf{t}\cdot\nabla\mathbf{t} = -\,\mathbf{t}\mathrm{x}\mathbf{rot}\,\mathbf{t} = \mathbf{R_K}^{-1} = \mathbf{n}/R_K$ in Richtung der Wellenkrümmung $\mathbf{R_K}$ [1]. Die von **t** und **n** aufgespannte Fläche ist die Schmiegungsebene (hier: Zeichenebene); darauf senkrecht steht die Binormale **b** = **txn.**

*(ii).Transversalwelle.* .Ausgangspunkt sind die (v) Kräfte- und die (vi) Wellengleichung der transversalen Welle mit der Geschwindigkeit $c_T \rightarrow$ c und den Amplituden $s_n$ und $s_b$ [m] in Normalen- und Binormalen-Richtung **n** u. **b** ($i = \sqrt{-1}$)

(11) $\rho\,[\mathbf{s}^{\circ\circ} + c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{s}] = 0$

(12) $\mathbf{s_I} := (s_n\mathbf{n} + is_b\mathbf{b})\exp(-\eta kx/2)\sin(\omega t - kx)$

Der Strahlungsdruck **f** der Transversalwelle folgt aus.

(13) $\mathbf{f} = \langle\mathbf{f}(t)\rangle_t = \langle\,\mathbf{s_I}\cdot\nabla(\mathbf{s_I}^{\circ\circ} + \mathbf{c^2rot\,rot\,s_I})\,\rangle_t$

Für den Normalfall mit geradliniger Ausbreitung, bei **t** = const, ergibt sich **f** = $\mathbf{f}_{1,2}$ = **t** ηke + **t** e°/c und ist voll identisch zur Longitudinalwelle nach (7). Da sich die $\mathbf{f}_{1,2}$ – und die $\mathbf{f}_{3\text{-}5}$ –Kräfte gegenseitig bedingen, kann auf eine explizite Nachrechnung von $\mathbf{f}_{3\text{-}5}$ verzichtet werden.

## Tensorpotential → Strahlungskräfte

*(i, ii). Wanderwellen.* Zunächst wird heuristisch das Tensorpotential **Q′** [J/m$^3$] eingeführt (**U** = Einheitsdyade)

(14) $\mathbf{Q}' = \rho v^2\,\mathbf{tt}\exp(-\eta kx) = e\,\mathbf{tt}\exp(-\eta kx)$ -für $x \to 0$

Die elliptisch polarisierte Transversalwelle (12) besitzt einen Drehimpuls m [J/m$^3$] mit dem antisymmetrischen Tensor **Q′′**

(15) $\mathbf{Q}'' = m\,\mathbf{bn}\exp(-\eta kx) = m\,\mathbf{U}\mathbf{x}\mathbf{t}\exp(-\eta kx)$ $x \to 0$

(16) $m = \omega^2 s_b s_n$

Auf die Tensoren **Q′** und **Q′′** den um die Zeitkoordinate erweiterten div-Operator angewandt ergibt

(17) $\mathrm{div}\,\mathbf{Q}' = \mathbf{f}_{1\text{-}5} = \mathbf{t}\,\eta ke + \mathbf{t}\,e°/c + \mathbf{t}e/R_G + \mathbf{n}\,e/R_K + \mathbf{tt}\cdot\nabla e$

(18) $\mathrm{div}\,\mathbf{Q}'' = \mathbf{rot}\,m\,\mathbf{t} = \mathbf{f}_{6\text{-}8} = m\mathbf{t}/R_T + m\mathbf{b}/R_k + \mathbf{t}\ \mathbf{x}\ \nabla m$

Nach dem Vergleich von (7) und (17) sind die Kräfte $\mathbf{f}_{1\text{-}5}$ der Störungsrechnung und des symmetrischen Tensorpotentials **Q′** identisch. Die Strahlungskräfte $\mathbf{f}_{6\text{-}8}$ gehen auf den asymmetrischen Drehimpuls-Tensor **Q′′** zurück**.**
Die ersten 3 Strahlungskräfte $\mathbf{f}_{1\text{-}3}$ = $f_{1\text{-}3}\mathbf{t}$ wirken jeweils in Wellenrichtung **t.** Die Kraft $f_1$ = ηke entspricht dem geläufigeren Ausdruck J′/c mit der Intensitätsabnahme J′ [W/m$^2$m]. Die Kraft $f_2$ = e°/ce beschreibt eine zeitliche Amplitudenmodulation und wird für die parametrische Schallerzeugung genutzt. Der Gaußsche Radius $R_G$ = (div **t**)$^{-1}$ (8) gibt die sphärische Divergenz der Wellenfront wieder und liefert bei divergierender Welle - bei positivem $R_G$ - eine Kraft $f_3$ = $e/R_G$ in Wellenrichtung **t**; bei Konvergenz in die entgegengesetzte Richtung. Bei einer Kugelwelle entspricht $r_G$ dem Quellabstand. Der 4. Term $f_4 = e/R_K = \rho v^2/R_K$ beschreibt die bei einem gekrümmten Wellengang mit dem Krümmungsradius $R_K$ (9) die in Normalenrichtung **n** wirkende Zentrifugalkraft. [1]. Wird in der Kraftkomponente $f_5$ = **t**·∇e die Energiedichte e durch die Schallintensität J [W/m$^2$] ersetzt nach e = J/c, so erhält man die von einem Gradienten der Wellengeschwindigkeit c′ = dc/dx verursachte Strahlungskraft $f_{5'}$ = ec′/c.[2]. Eine Drehung der Polarisationsebene verursacht die Kraft $f_6 = m/R_T$ (10) in Wellenrichtung **t.** In Richtung der Binormalen **b** wirkt die Kreiselkraft $f_7 = m/R_K$. Schließlich wirkt die von einem m-Gradienten verursachte Kraft $\mathbf{f}_8$ = **tx**∇m senkrecht zu **t,** liegt also in der **nb**-Ebene.

Der Gesamtkrümmungsradius R des Schallstrahls ist nach dem Lancretschen Satz $1/R^2 = 1/R_T^2 + 1/R_K^2$. Der Darboux-Vektor ist $\mathbf{d} = \mathbf{t}/R_T + \mathbf{b}/R_K = \mathbf{rot}\ \mathbf{t}$.

Die *stehende Welle* hat bei einem Abstand $x_0$ des Referenzpunktes **O** vom Schwingungsmaximum das Tensorpotential **Q** = e**tt** cos$^2$k(x-$x_0$) und liefert die Kraft $\mathbf{f}_9$ = e**t** sin 2k$x_0$. Bei Oberflächenwellen ist diese für die Chladnischen Staubfiguren verantwortlich.

## Tensorpotential → Strahlungsdruck

Eine Körperschallwelle mit dem Impulstensor **Q** = **Q′** + **Q′′** verursacht bei Absorption, Reflexion oder Brechung an einer Flächendiskontinuität einen Druckvektor **p** [Pa]

(19) $\mathbf{p} = \mathrm{Div}\,\mathbf{Q} = \mathrm{Div}\,(e\mathbf{tt} + m\mathbf{Uxt}) = \mathrm{Div}\,e\mathbf{tt} + \mathbf{Rot}\,m\mathbf{t}$

Hat die Diskontinuität die Flächennormale **g** und sind $e_1$ und $\mathbf{t}_1$ ($e_2$,$\mathbf{t}_2$) Energie und Richtung der einfallenden (ausfallenden) Welle dann liefert die Flächendivergenz Div

(20) $\mathbf{p} = (e_1\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1 - e_2\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)\cdot\mathbf{g} + (m_1\mathbf{t}_1 - m_2\mathbf{t}_2)\mathbf{xg}$

mit der Druckkomponente $p_\perp$ [Pa] senkrecht und dem Schubvektor $\mathbf{p}_=$ [Pa] parallel zur Grenzfläche.

(21) $p_\perp = e_1\,(\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{g})^2 - e_2\,(\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{g})^2$

(22) $\mathbf{p}_= = [(e_1\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1 - e_2\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)\cdot\mathbf{g}]\mathbf{xg} + [m_1(\mathbf{t}_1\mathbf{xg}) - m_2(\mathbf{t}_2\mathbf{xg})]\mathbf{xg}$

Bei verlustloser, senkrechter Reflexion ist $p_\perp$ = 2e = 2J/c. - Eine zirkular polarisierte Tetherwelle der Leistung N und der Kreisfrequenz ω überträgt das Moment M = N/ω. [3]

## Akustische Masse

Eine verlustfreie Fluidströmung der Geschwindigkeit **v** und der Dichte ρ hat den Impulstensor ρ**vv** =e**tt** und ist mit η = 0 gleich dem Tensorpotential **Q′** (14). Bei dieser Isomorphie verhält sich eine Schallwelle wie eine Gleichströmung der Dichte ρ und der Schnelle **v** = v**t**. Eine Alternativmodell dazu ist die Strömung mit der Dichte μ = e/c$^2$ [kg/m$^3$] und der Strömungsgeschwindigkeit **c** = c**t.** In beiden Darstellungen hat die Schallenergie eine träge – nicht aber schwere - Masse, analog wie dies für Licht gilt. Schließlich ist der Ansatz, mit dem Hasenöhrl – ohne die Lichtquantelung - wellenmechanisch die träge Masse einer Lichtmode bestimmt hat, ebenfalls auf Schallwellen übertragbar.

## Zusammenfassung

Eine Körperschallwelle mit der Wellenzahl k, dem Verlustfaktor η, der Energiedichte e, dem Drehimpuls m und der Wellenrichtung **t**,x hat ein Tensorpotential **Q** und verursacht eine Strahlungskraft **f** im Innern und einen Strahlungsdruck **p** an den Grenzflächen eines Festkörpers

$\mathbf{Q} = (e\mathbf{tt} + m\mathbf{Uxt})\,w/sx$ $\mathbf{f} = \mathrm{div}\,\mathbf{Q}$ $\mathbf{p} = \mathrm{Div}\,\mathbf{Q}.$

Für die Wanderwelle ist w/sx = exp(-ηkx), für stehendes Wellenfeld gilt w/sx = cos$^2$k(x-$x_0$).

## Vorarbeiten


[1] O. Bschorr (=O.B.), J. Starke: Zentrifugale Strahlungskräfte…“. Acta Acustica. Vol. 91 (2005) S. 936/8.

[2] O. B: Acoustic Radiation Pressure on the Atmosphere of the Sun. Solar Physics. 79 (1982) S. 327- 331

[3] O. B: Controlling Short-tethered Satellites. Acta Astronautica. Vol. 7 (1980) S. 567 – 573.

[4] O.B: The force between … plates due to the radiation pressure of phonons. J. Acoust. Soc. Am. **106** (1999) 3730/1