

# Energiefluss in dünnwandigen Strukturen

Sebastian Buckert

Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM, Technische Universität Darmstadt,  
64289 Darmstadt, E-Mail: buckert@szm.tu-darmstadt.de

## Einleitung

Im Mittelpunkt dieses Projektes stehen die aktive Beeinflussung von Strukturschwingungen in dünnwandigen Strukturen zur Minderung der Schallabstrahlung und die Implementierung geeigneter Methoden zur Betrachtung und Bewertung der Strukturintensität (STI). Die untersuchte Struktur besteht aus einem Stahlrahmen, der verschiedene Einspannungen einer Platte ermöglicht. Die Platte wurde mit passiven (Dämpfungsbelag) und aktiven Komponenten (Aktoren, Sensoren) sowie mit einer geeigneten Regelung ausgestattet. Für die Messung der STI auf der Platte wird ein Scanning-Laservibrometer verwendet. Energiebilanzen für das passive und aktive System werden auf Basis der STI erstellt.

## Analytisches Modell der Platte

Die Simulationen werden in Matlab und Simulink mit einem analytischen Modell der Platte, das auf der Kirchhoffschen Plattentheorie basiert, durchgeführt. Darüber hinaus wurden ein Piezopatch-Aktor und eine variable Randeinspannung in das Modell integriert. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung der Platte [1]

$$D\Delta\Delta w(x,y,t) + \rho h \ddot{w}(x,y,t) = q(x,y,t) \quad (1)$$

mit der Verschiebung  $w(x,y,t)$  senkrecht zur Platte in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  und den Richtungen  $x$  und  $y$  auf der Platte.  $q(x,y,t)$  repräsentiert die externe Anregung,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

beschreibt die Steifigkeit der Platte mit dem

E-Modul  $E$ , der Plattendicke  $h$  und der Querkontraktionszahl  $\mu$ . Die punktförmige, harmonische Kraftanregung kann mit Hilfe der Diracfunktion  $\delta$  modelliert werden

$$q(x,y,t) = \hat{F} \delta(x-x^*, y-y^*) \cdot e^{i\Omega t} \quad (2)$$

In Gleichung (2) ist  $\hat{F}$  die komplexe Kraftamplitude, die auf der Platte an der Stelle  $(x^*, y^*)$  mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  wirkt. Da bei piezokeramischen Plattenaktoren die mechanischen Spannungen an den Rändern maximal werden, können die an der Platte angreifenden Kräfte  $P_{mn}$  mit Sprungfunktionen  $H(x,y)$  beschrieben werden. Die Dämpfung wird berücksichtigt, indem eine komplexe Eigenfrequenz  $\omega_{mn,d} = \omega_{mn} \sqrt{1+i\xi}$  mit dem Dämpfungsgrad  $\xi$  eingeführt wird. Der Reihenansatz  $w(x,y,t) = \sum_{m,n} C_{mn} \phi_{mn}(x,y) e^{i\Omega t}$  mit

den Eigenmoden  $\phi_{mn}$  und den Koeffizienten  $C_{mn}$  (Vergleiche Gleichung (3)) wird in Gleichung (1) eingesetzt und man erhält letztendlich für die Verschiebung der Platte die Lösung

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{M} \frac{\hat{F} \cdot \phi_{mn}(x^*, y^*) - P_{mn}}{(\omega_{mn}^2 (1+i\xi) - \Omega^2)} \phi_{mn}(x,y) e^{i\Omega t} \quad (3)$$

Da bei experimentellen Untersuchungen eine exakte Fest- oder Loslagerung nicht realisiert werden kann, werden für das analytische Modell eine definierte Randsteifigkeit und ein linearer Ansatz zur Berechnung einer gemischten Eigenform  $\phi_{mn, \text{mixed}}$  zwischen Fest- und Loslagerung verwendet.

Wie in Abbildung 1 zu sehen ist, stimmt das Modell gut mit den experimentellen Ergebnissen überein.

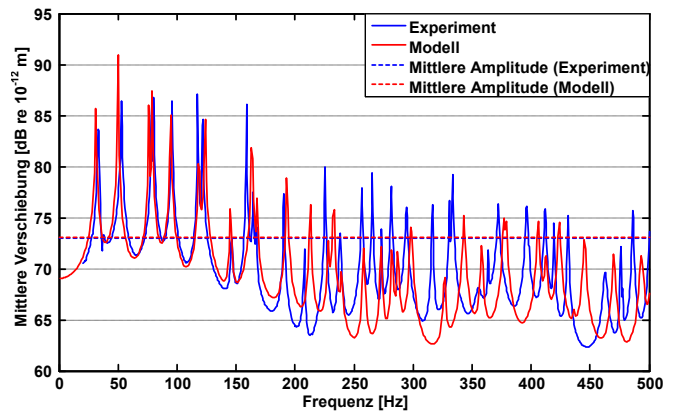


Abbildung 1: Vergleich zwischen Modell und Experiment

## Strukturintensitätsanalyse

Die STI ist das Produkt aus Spannungstensor  $\mathcal{S}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$ . Die STI kann auch mit den aus der Mechanik bekannten Schnittkräften  $N$ ,  $Q$  und den Momenten  $M$  sowie den Geschwindigkeiten  $v$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\phi}$  ausgedrückt werden [2]

$$-\bar{I}_x h = \bar{N}_x \bar{v}_x + \bar{N}_{xy} \bar{v}_y + \bar{Q}_x \bar{v}_z + \bar{M}_x \bar{\dot{\phi}}_y + \bar{M}_{xy} \bar{\dot{\phi}}_x \quad (4)$$

Die Überstreichung der komplexen Kräfte, Momente und Geschwindigkeiten indiziert die zeitliche Mittelung dieser Größen. Der Realteil der STI stellt den Wirkleistungsfluss dar, der Imaginärteil beschreibt den lokalen Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie.

Um die STI auf der Platte zu berechnen, wird die Oberflächengeschwindigkeit senkrecht zur Oberfläche mit einem Scanning-Laservibrometer gemessen. Aus den Geschwindigkeiten wird die STI nach einem Gradientenverfahren in Matlab berechnet. Im betrachteten Frequenzbereich von 20 Hz bis 500 Hz liefert das Gradientenverfahren gute Ergebnisse.

Für den eingeschwungenen Zustand folgt aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik für ein Kontrollvolumen  $p_{\text{diss}} = -\nabla \cdot I$ . Die dissipierte Energie ist proportional zur negativen Änderung der Intensität. Es kann gezeigt werden, dass der Realteil der Divergenz der STI proportional zur potentiellen Energie  $e_p$  ist [3]

$$\text{Re}(\nabla \cdot I) = -2\xi \Omega e_p \quad (5)$$

Der Imaginärteil der Divergenz der STI ist proportional zur Differenz von potentieller- und kinetischer Energie  $e_k$  [3]

$$\text{Im}(\nabla I) = -2\Omega(e_k - e_p). \quad (6)$$

### Passives, unreguliertes System

Am unregulierten Prüfstand werden Messungen im Bereich von 20 Hz bis 500 Hz durchgeführt. Die Anregung erfolgt über einen Shaker mit Sinussignalen in Schritten von 0,5 Hz, wodurch ein eingeschwungener Zustand sichergestellt werden kann. Es wurde die Platte mit Fest- und Loslagerung sowie dissipativer Lagerung in Kombination mit verschiedenen Dämpfungsbelägen auf der Platte untersucht. Darüber hinaus wurde in einer gesonderten Versuchsreihe der Rahmen mit Abkoppellementen elastisch gelagert. In allen Versuchen wurde die STI ermittelt und basierend auf den Messungen eine Energiebilanz aufgestellt. Die folgende Abbildung zeigt die Energiebilanz über den Frequenzbereich für die Platte mit Dämpfungsbelag.

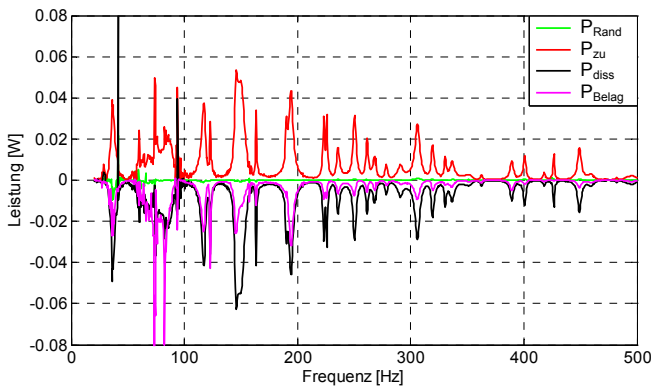


Abbildung 2: Energiebilanz über den Frequenzbereich

Aus Abbildung 2 wird ersichtlich, dass die zu- ( $P_{zu}$ ) und die abgeführte Leistung ( $P_{diss}$ ) im betrachteten Frequenzbereich in etwa gleich sind. Abgesehen von Messfehlern im Bereich bis ca. 100 Hz kann man mit diesem Verfahren die Dissipation auf der Platte, den Anteil des Dämpfungsbelages ( $P_{Belag}$ ) und die in Form von Biegewellen über den Rand abfließende Leistung ( $P_{Rand}$ ) berechnen.

### Aktives System

Die Anregung der Platte erfolgt ebenfalls mit einem Shaker, der Piezopatch-Aktor wird mit einem dSpace-System über einen Leistungsverstärker angesteuert. In Voruntersuchungen wurde das gedämpfte System mit zwei punktsymmetrisch zur Plattenmitte angeordneten Kräften mit identischer Amplitude simuliert und die Phase zwischen beiden Kräften variiert. Die Anregung erfolgt in der 1-1-Mode. Bei einem Phasenwinkel von  $180^\circ$  zwischen beiden Kräften ist die Schwingung auf der Platte minimal. Wie in Abbildung 3 zu erkennen ist, ist aufgrund der Dämpfung die mittlere zu- und abgeführte Wirkleistung (Realteil der Leistung) größer Null. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass aus der zu- und abgeführten Leistung nicht direkt auf den energetischen Zustand der Platte geschlossen werden kann. Betrachtet man den Bereich zwischen  $135^\circ$  und  $225^\circ$ , fällt zudem auf, dass sich die Schwingung auf der Platte so ausbildet, dass zu- und abgeführte Wirkleistung annähernd identisch sind. Im unge-

dämpften Fall gilt dies für den kompletten Bereich von  $0^\circ$ – $360^\circ$ . Im Experiment wird die Platte in der 1-2-Mode angeregt, die Phase zwischen Shaker und Piezopatch wird in  $30^\circ$ -Schritten zwischen  $0^\circ$  und  $270^\circ$  eingestellt. Das für gedämpfte Systeme beschriebene Verhalten kann im Versuch bestätigt werden.

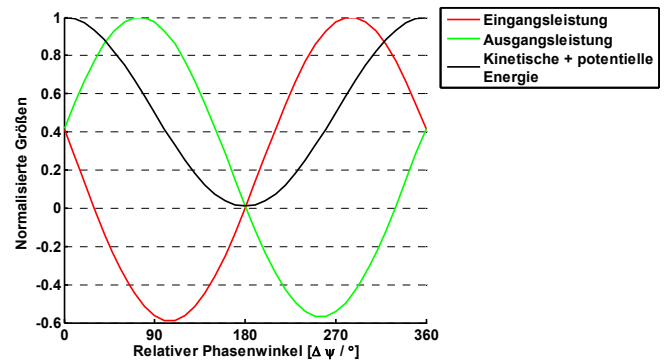


Abbildung 3: Leistungsbetrachtung zweier auf der Platte angreifende Kräfte

Mit Hilfe der STI kann darüber hinaus der Wirkleistungsfluss auf der Platte sichtbar gemacht werden, die Divergenz des Realteils der STI gibt Aufschluss über die Verteilung von Quellen (Shaker, rot) und Senken (Piezopatch, blau) auf der Struktur. Abbildung 4 zeigt die Energieverteilung auf der Platte bei 77 Hz (1-2-Mode) und  $0^\circ$  Phasendifferenz zwischen Shaker und Piezopatch. In dieser Einstellung kommt es zu einer Minimierung der Schwingungen auf der Platte.

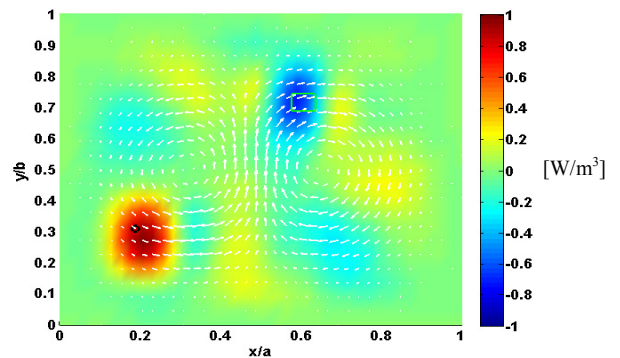


Abbildung 4: STI und Divergenz der STI (normalisiert)

Bei der Betrachtung geregelter Systeme sind der Verlauf der STI und deren Divergenz auf der Platte nahezu identisch.

### Danksagung

Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG gefördert (Förderkennzeichen: HA 1634 / 20-1).

### Literatur

- [1] Hagedorn, P.: Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems. John Wiley and Sons, Ltd., 2007.
- [2] Gavrić, L., Pavić, G.: A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach, Journal of Sound and Vibration, 164 (1): 1993, S. 29–43.
- [3] Pavić, G.: The role of damping on energy and power in vibrating systems. Journal of Sound and Vibration, 281: 2005, S. 45–71.