

Numerische Bestimmung der Übertragungsmatrix von Mehrtor-Schalldämpfern von Fahrzeug-Abgassystemen

Bernhard Karl Bachner

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), 38116 Braunschweig, Deutschland, Email: bernhard.bachner@ptb.de

Einleitung

Ein wesentlicher Aspekt der Konzipierung einer Fahrzeug-Abgasanlage ist die frühzeitige Erkennung möglicher Zielkonflikte zwischen Bauraumvorgaben und akustischen Anforderungen. Ein einfach anzuwendendes Verfahren zur Abschätzung des Resonanz-Verhaltens eines vollständigen Abgassystems und somit zur Bewertung der Volumenaufteilung auf einzelne Komponenten ist eine Modellbildung der Wellenausbreitungsvorgänge mittels Übertragungsmatrizen. Waren die ersten Anwendungen dieses Verfahrens [1] noch auf reine Serienschaltungen akustischer Elemente beschränkt, so wurden in jüngerer Zeit Erweiterungen vorgestellt [2, 3, 4], die eine Anwendung auf fluid-akustische Netzwerke und insbesondere auf komplex aufgebaute Abgassysteme ermöglichen.

Während die Verfahren nach [2, 3] auf die Bestimmung der Übertragungsmatrix (relative Betrachtung) eines komplexen Systems abzielen, ist der in [4] vorgestellte Ansatz zunächst auf die Simulation erzwungener Schwingungen im betrachteten System unter gegebenen Schallquellen und Mündungsabschlüssen (absolute Betrachtung) ausgerichtet. Letzteres Verfahren hat aber den Vorteil, für ein zu beschreibendes Netzwerk immer eine Minimalkonfiguration des zu lösenden Gleichungssystems zu finden, da die Anzahl der Freiheitsgrade gegenüber den früher publizierten Ansätzen halbiert ist. Zur höheren Effizienz tritt als weiterer Vorteil noch die Vermeidung numerischer Probleme hinzu, die in den Verfahren gemäß [2, 3] bei Wellenleiter-Elementen mit stark gedämpften Eigenformen entstehen können. Schließlich berücksichtigt das Verfahren nach [4] die Modellbildung aktiver Systeme.

Auf Grund dieser Vorteile erweist es sich als besonders günstig, dass aus den bei der Modellbildung nach [4] gewonnen Matrix-Gleichungen ebenso die Übertragungsmatrix eines komplex aufgebauten Mehrtor-Systems abgeleitet werden kann. Die dazu angewandte Vorgehensweise wird im Folgenden skizziert. Ergebnisse einer Simulation werden für einen Schalldämpfer gemäß Abbildung 1 entsprechenden Messdaten gegenübergestellt.

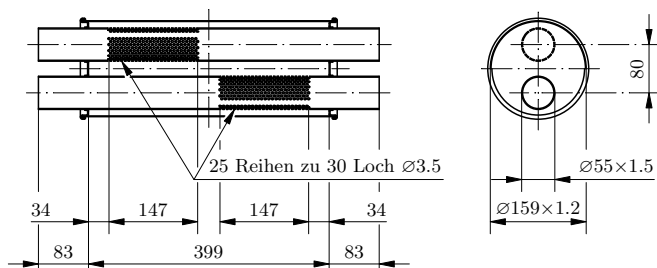


Abbildung 1: Wickelschalldämpfer mit Übersprechstelle.

Definition der Übertragungsmatrix

Die Grundzüge der Modellbildung sind in [4] dargestellt und werden hier nur zusammenfassend angeführt. An das zu untersuchende System (Index s) gebildet aus einer Anzahl $i = 1 \dots n$ kontinuierlicher Wellenleiterelemente (Index g), die durch eine Anzahl $j = 1 \dots m$ diskreter Verbindungselemente zu einem Netzwerk verbunden sind, werden an den Rand-Toren (Index b) „virtuelle“ Eintor-Quellen der Anzahl $k = 1 \dots l$ mit den Quellstärken $q_{b,k}$ und den Quellimpedanzen $Z_{b,k}$ angeschlossen. Die konkreten Quellgrößen sind für die späteren Betrachtungen ohne Belang und können beliebig gewählt werden.

Die Modellbildung aller Wellenleiterelemente führt auf eine lineare Abbildung eines Vektors $\underline{s}_s^\oplus = \{\underline{s}_{g,i}^\oplus\}^T$, der die an den Toren einfallenden Wellen zusammenfasst, auf den Vektor der an den Toren emittierten Wellen $\underline{s}_s^\ominus = \{\underline{s}_{g,i}^\ominus\}^T$. Die Übertragungsmatrix wird als Blockdiagonalmatrix der Matrizen aller Wellenleiter $\mathbf{G}_s = \text{diag}(\mathbf{G}_i)$ erhalten und innere Quellen werden durch den Quellvektor $\underline{q}_{g,s}^\ominus = \{\underline{q}_{g,i}^\ominus\}^T$ beschrieben. Sämtliche Vektorkomponenten sowie Matrixkoeffizienten sind als spektrale Größen in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω zu verstehen. Man erhält für die Übertragungsgleichung der Wellenleiter somit

$$\underline{s}_s^\ominus = \mathbf{G}_s \underline{s}_s^\oplus + \underline{q}_{g,s}^\ominus. \quad (1)$$

Die Matrix eines einzelnen Wellenleiters \mathbf{G}_i entspricht dem Matrixexponential der Eigenwert-Diagonalmatrix der Koeffizientenmatrix des zu Grunde liegenden Differenzialgleichungssystems. Die Transformation des Vektors der einfallenden Wellen \underline{s}_s^\oplus auf den Vektor der an den Toren messbaren Zustandsgrößen Schalldruck, Dichtefluktuation und Schallschnelle $\underline{s}_s = \{\underline{s}_{g,i}\}^T$ ist durch die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_s = \text{diag}(\mathbf{T}_i)$ und einen transformierten Quellvektor $\underline{q}_{g,s} = \{\underline{q}_{g,i}\}^T$ gegeben. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_i eines Wellenleiters enthält neben dem oben erwähnten Matrixexponential \mathbf{G}_i die Rechtseigenvektoren der Koeffizientenmatrix des Differenzialgleichungssystems.

$$\underline{s}_s = \mathbf{T}_s \underline{s}_s^\oplus + \underline{q}_{g,s} \quad (2)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben das Übertragungsverhalten aller Wellenleiterelemente. Um einen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen an den Rand-Toren eines Schalldämpfersystems zu erhalten, werden die Komponenten der oben definierten Vektoren so umsortiert, dass eine Partitionierung jedes Vektors in Komponenten an den Rand-Toren mit Index b und Komponenten für die Innen-Tore mit Index i erfolgen kann. Man erhält dadurch für die Vektoren $\underline{s}_s^\oplus = \{\underline{s}_b^\oplus, \underline{s}_i^\oplus\}^T$,

$\underline{s}_s^\ominus = \{\underline{s}_b^\ominus, \underline{s}_i^\ominus\}^T$, $\underline{s}_s = \{\underline{s}_b, \underline{s}_i\}^T$, $\underline{q}_{g,s} = \{\underline{q}_{g,b}, \underline{q}_{g,i}\}^T$ und $\underline{q}_{g,s} = \{\underline{q}_{g,b}, \underline{q}_{g,i}\}^T$.

Nach Partitionierung der Übertragungsgleichung (1) der Wellenleiterelemente erhält man

$$\begin{Bmatrix} \underline{s}_b^\ominus \\ \underline{s}_i^\ominus \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb} & \mathbf{G}_{bi} \\ \mathbf{G}_{ib} & \mathbf{G}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{s}_b^\oplus \\ \underline{s}_i^\oplus \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{q}_{g,b} \\ \underline{q}_{g,i} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Mit der Transformationsgleichung (2) wird analog verfahren.

$$\begin{Bmatrix} \underline{s}_b \\ \underline{s}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{bb} & \mathbf{T}_{bi} \\ \mathbf{T}_{ib} & \mathbf{T}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{s}_b^\oplus \\ \underline{s}_i^\oplus \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{q}_{g,b} \\ \underline{q}_{g,i} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Die jeweils erste Zeile dieser beiden Matrixgleichungen (3) und (4) stellt die gesuchten Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen an den Systemrändern b her. Allerdings ist in ihnen noch eine Abhängigkeit von den inneren Freiheitsgraden \underline{s}_i^\oplus enthalten.

Matrixkondensation

Zur Elimination der inneren Freiheitsgrade wird die Matrixgleichung des Gesamtsystems bestehend aus den Wellenleitern, den Verbindungselementen und den „virtuellen“ Quellen herangezogen. Zur Herleitung dieser Gleichung wird auf [4] verwiesen. In der partitionierten Form lautet diese Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{bb} & \mathbf{S}_{bi} \\ \mathbf{S}_{ib} & \mathbf{S}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{s}_b^\oplus \\ \underline{s}_i^\oplus \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{q}_b \\ \underline{q}_i \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Die zweite Zeile der Matrixgleichung (5) repräsentiert den für die Matrixkondensation gesuchten Zusammenhang zwischen den inneren Freiheitsgraden \underline{s}_i^\oplus und den Freiheitsgraden an den Systemrändern \underline{s}_b^\oplus .

$$\underline{s}_i^\oplus = -\mathbf{S}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ib} \underline{s}_b^\oplus + \mathbf{S}_{ii}^{-1} \underline{q}_i \quad (6)$$

Aus der Nichtberücksichtigung der ersten Zeile von (5) wird ersichtlich, dass die konkrete zahlenmäßige Festlegung der Quellgrößen $q_{b,k}$ und $Z_{b,k}$ ohne Bedeutung ist, da diese nur in die Matrix \mathbf{S}_{bb} und den Vektor \underline{q}_b Eingang finden, die für die weiteren Ableitungen ohne Bedeutung sind.

Setzt man (6) in die jeweils erste Zeile von (3) und (4) ein, erhält man für die Übertragungsgleichung

$$\underline{s}_b^\ominus = \underbrace{(\mathbf{G}_{bb} - \mathbf{G}_{bi} \mathbf{S}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ib})}_{\mathbf{G}} \underline{s}_b^\oplus + \underbrace{(\underline{q}_{g,b} + \mathbf{G}_{bi} \mathbf{S}_{ii}^{-1} \underline{q}_i)}_{\underline{q}_g} \quad (7)$$

sowie für die Transformationsgleichung

$$\underline{s}_b = \underbrace{(\mathbf{T}_{bb} - \mathbf{T}_{bi} \mathbf{S}_{ii}^{-1} \mathbf{S}_{ib})}_{\mathbf{T}} \underline{s}_b^\oplus + \underbrace{(\underline{q}_{g,b} + \mathbf{T}_{bi} \mathbf{S}_{ii}^{-1} \underline{q}_i)}_{\underline{q}_g}, \quad (8)$$

woraus die Definitionen für die gesuchten Größen \mathbf{G} , \mathbf{T} , \underline{q}_g^\ominus und \underline{q}_g abgelesen werden können.

Einen Vergleich zwischen Messung und Simulation für den Schalldämpfer gemäß Abbildung 1 bei Raumtemperatur und ruhendem Fluid zeigen die Abbildungen 2 und 3. Bezüglich der experimentellen Bestimmung der Übertragungsmatrix eines Mehrtor-Schalldämpfers wird auf [5] verwiesen.

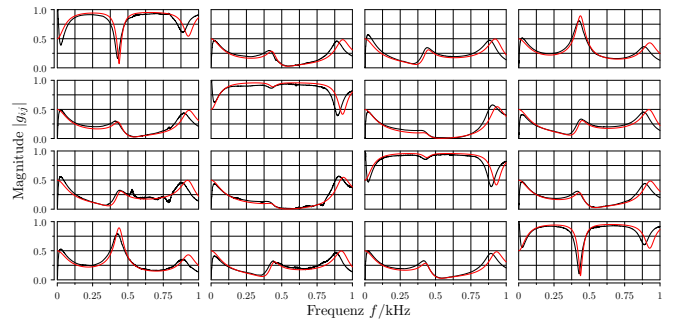


Abbildung 2: Magnituden der Matrixkoeffizienten der Übertragungsmatrix \mathbf{G} für den Schalldämpfer nach Abbildung 1, — Messung, - - Simulation.

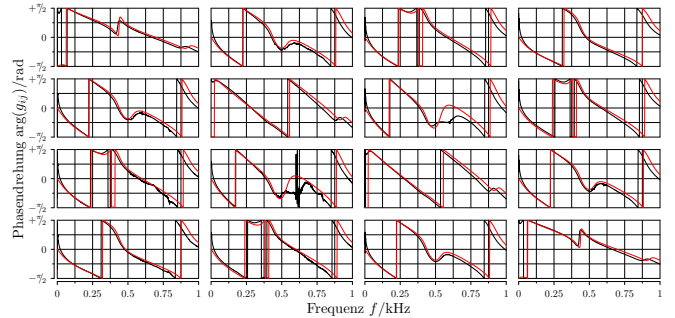


Abbildung 3: Phasendrehungen der Matrixkoeffizienten der Übertragungsmatrix \mathbf{G} für den Schalldämpfer nach Abbildung 1, — Messung, - - Simulation.

Fazit

Es wurde ein Verfahren vorgestellt, welches den in [4] beschriebenen Ansatz für die lineare Modellbildung der 1-dimensionalen Wellenausbreitung in fluidakustischen Netzwerken um die Möglichkeit zur Bestimmung der Übertragungsmatrix eines komplexen Mehrtor-Schalldämpfers erweitert. Im Vergleich zu früher publizierten Verfahren [2, 3] bestehen Vorteile hinsichtlich Effizienz und Vermeidung numerischer Probleme sowie durch die Anwendbarkeit auf aktive Systeme. Die sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment in den Abbildungen 2 und 3 demonstriert das Potenzial des Verfahrens in anschaulicher Weise.

Literatur

- [1] Munjal, M. L., Sreenatha, A. V. and Narasimhan, M. V.: Velocity ratio in the analysis of linear dynamical systems. *J. Sound Vib.*, 26(2):173–191, 1973.
- [2] Dowling, J. F. und Peat, K. S.: An algorithm for the efficient acoustic analysis of silencers of any general geometry. *Appl. Acoust.*, 65(3):211–227, 2004.
- [3] Panigrahi, S. N. und Munjal, M. L.: Plane wave propagation in generalized multiply connected acoustic filters. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(5):2860–2868, 2005.
- [4] Bachner, B. K.: Ein objekt-orientierter Ansatz zur linear-akustischen Modellbildung komplexer Schalldämpfersysteme. Tagungsbeitrag DAGA 2007.
- [5] Bachner, B. K.: Experimentelle Bestimmung der Übertragungsmatrix von Mehr-Tor-Schalldämpfern. Tagungsbeitrag DAGA 2008.