Simultane Optimierung von Tilgerparametern an einem Stabwerk

Oliver Janda[1], Franziska Kartzow[2], Lars Schewe[2]

[1] *Institut für Automatisierungstechnik, 64283 Darmstadt, Deutschland, Email: ojanda@iat.tu-darmstadt.de*

[2] *Arbeitsgruppe Optimierung, 64293 Darmstadt, Deutschland, Email: fkartzow / schewe@mathematik.tu-darmstadt.de*

Einleitung

Schwingungstilger werden seit vielen Jahren zur Reduzieren von unerwünschten Schwingungen eingesetzt. Die von Den Hartog [2] publizierten Berechnungsvorschriften für gedämpfte Tilger zählen auch heute noch zu den wichtigsten Grundlagen bei der Auslegung von Schwingungstilgern. Bei diesem Ansatz werden die Tilger auf die Eigenfrequenz einer bestimmten Mode ausgelegt. Mögliche Wechselwirkungen der Tilger untereinander werden nicht berücksichtigt. Wir stellen ein Verfahren für die Bestimmung der Tilgerparameter Steifigkeit und Dämpfung vor, mit dem es möglich ist das Zusammenwirken mehrerer Tilger an einer komplexen Struktur zu optimieren. Dabei werden sowohl die Wechselwirkungen der Tilger untereinander als auch die Angriffsorte und Frequenzspektren der Störanregungen, soweit diese bekannt sind, systematisch berücksichtigt. Auch die gezielte Beruhigung von bestimmten Strukturteilen und/oder Frequenzbereichen kann in das Optimierungsproblem eingebunden werden. Als Gütekriterium wird die $\mathcal{H}_\infty$-Norm einer verallgemeinerten Störübertragungsfunktion verwendet. Dieses stellt die Erweiterung des Gütemaßes der klassischen Auslegung auf Mehrgrößensysteme dar. Die Minimierung der $\mathcal{H}_\infty$-Norm erfolgt dabei unter Berücksichtigung von bilinearen Matrixungleichungen als Nebenbedingung.

Problemformulierung und Optimierung

Es wird davon ausgegangen, dass die Struktur, an der die Tilger angebracht werden sollen, durch ein Zustandsraummodell der folgenden Form beschreibbar ist:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{S} &= \mathbf{A}_\mathrm{S}\mathbf{x}_\mathrm{S} + \mathbf{B}_{\mathrm{S}u}\mathbf{u} + \mathbf{B}_{\mathrm{S}d}\mathbf{d} \\ \mathbf{y}_\mathrm{S} &= \mathbf{C}_y\mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_z\mathbf{x}_\mathrm{S}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei soll der Index S i. Allg. die Matrizen bezeichnen, die zur Struktur gehören. Dies sind die Systemmatrix $\mathbf{A}_\mathrm{S}$, die Eingangsmatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S}u}$ der Tilgerkräfte $\mathbf{u}$ und die Eingangsmatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S}d}$ der Störkräfte $\mathbf{d}$. Die Ausgänge $\mathbf{y}_\mathrm{S}$ sind die Auslenkungen und Geschwindigkeiten der Struktur, an denen die Tilger angebracht sind. Diese entstehen aus den Zuständen $\mathbf{x}_\mathrm{S}$ durch Multiplikation mit der entsprechenden Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_y$. Die Fehlersignale $\mathbf{z}$ mit der zugehörigen Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_z$ sind die Auslenkungen und/oder Geschwindigkeiten an den Punkten der Struktur, die durch die Tilger beruhigt werden sollen.

Wir betrachten nun das Zustandsraummodell eines Tilgers. Der Tilger wird als Einmassenschwinger mit linearer Federkennlinie und viskoser Dämpfung idealisiert. Ein Zustandsraummodell für die Tilgermasse m_T, welches als Eingang die Tilgerkraft, bestehend aus Feder- und Dämpferkraft, besitzt, lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_\mathrm{T1} \\ \dot{x}_\mathrm{T2} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_\mathrm{T1} \\ x_\mathrm{T2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_T} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_\mathrm{T}} f_\mathrm{T} \\ y_\mathrm{T} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_\mathrm{T1} \\ x_\mathrm{T2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Tilgerzustände $\mathbf{x}_{\mathrm{T}1,2}$ sind die Auslenkung und Geschwindigkeit der Tilgermasse, welche auch als Modellausgänge dienen.
Werden mehrere Tilger auf einer Struktur angebracht, so sind die Tilgermodelle parallel anzuordnen und es ergeben sich die Matrizen für das Gesamttilgermodell $\mathbf{A}_\mathrm{T}$, $\mathbf{B}_\mathrm{T}$ und $\mathbf{C}_\mathrm{T}$ als Blockdiagonalmatrizen mit den jeweiligen Blöcken aus (2).

Das Gesamtmodell aus Struktur- und Tilgerdynamik folgt aus (1) und (2) zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{S} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{T} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\mathrm{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{x}_\mathrm{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\mathrm{S}u} \\ \mathbf{B}_\mathrm{T} \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\mathrm{S}d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_\mathrm{S} - \mathbf{y}_\mathrm{T} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_y & -\mathbf{C}_\mathrm{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{x}_\mathrm{T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_z & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{x}_\mathrm{T} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die neuen Ausgänge $\mathbf{y}$ stellen dabei die Relativbewegungen und -geschwindigkeiten an den Tilgerpunkten dar. Die Reglermatrix $\mathbf{K}$ verbindet nun die Tragwerksstruktur mit den Tilgern über

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \tag{4}$$

Die Matrix $\mathbf{K}$ enthält die Steifigkeiten k_i und Dämpferkonstanten d_i der Tilger und hat die folgende Struktur:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_N & d_N \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Damit erhält man nun aus (3) und (4) den geschlossenen Regelkreis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{S} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{T} \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{S} + \mathbf{B}_{\mathrm{S}u}\mathbf{K}\mathbf{C}_y & -\mathbf{B}_{\mathrm{S}u}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mathrm{T} \\ \mathbf{B}_\mathrm{T}\mathbf{K}\mathbf{C}_y & \mathbf{A}_\mathrm{T} - \mathbf{B}_\mathrm{T}\mathbf{K}\mathbf{C}_\mathrm{T} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{x}_\mathrm{T} \end{pmatrix} \\ &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\mathrm{S}d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{d} \\ \mathbf{z} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_z & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{\mathbf{C}}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{S} \\ \mathbf{x}_\mathrm{T} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Aufgabe der Optimierung ist es eine Matrix $\mathbf{K}$ zu bestimmen, so dass die Übertragung von Störungen $\mathbf{d}$ auf die Fehlerausgänge $\mathbf{z}$ möglichst gering ist. Als Maß für die Güte der Reduktion wählen wir die $\mathcal{H}_\infty$-Norm. Mit dieser Wahl kann die Berechnung der Tilgerparameter mithilfe eines Optimierungsproblems mit bilinearen Matrixungleichungen (BMIs) als Nebenbedingungen erfolgen.
Sei

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j \mathbf{N}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j \mathbf{Q}_{ij} \tag{7}$$

gegeben. Hierbei seien die symmetrischen Matrizen $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{N}_i$ und $\mathbf{Q}_{ij}$ gleicher Dimension fest vorgegeben. Die Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ seien variabel. Eine bilineare Matrixungleichung in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ lautet dann wie folgt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \succeq 0. \tag{8}$$

Das Ungleichheitszeichen bedeutet, dass die Variablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ so gewählt werden müssen, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ positiv semidefinit ist. Die Berechnung der $\mathcal{H}_\infty$-Norm ist nur eines von vielen Problemen, dass mithilfe von bilinearen Matrixungleichungen modelliert werden kann (siehe z.B. [4]). Die $\mathcal{H}_\infty$-Norm eines allgemeinen Zustandsraummodells der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{d} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{9}$$

ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}(s)\|_\infty &= \|\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\|_\infty \\ &:= \sup_{\{\omega \in \mathbb{R} \cup \infty\}} \sigma_{\max}(\mathbf{T}(i\omega)). \end{aligned} \tag{10}$$

Das sogenannte bounded-real Lemma verknüpft nun die $\mathcal{H}_\infty$-Norm eines solchen Systems mit bilinearen Matrixungleichungen (siehe auch [1]).

Lemma 1 *Seien* $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ *des linearen zeitinvarianten Systems* (9) *minimal. Desweiteren sei* $\mathbf{A}$ *Hurwitz. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{T}(s)\|_\infty = \gamma \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, \mathbf{Y} \textit{ mit } \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \textit{ und } \mathbf{Y} \succ 0, \textit{ so dass} \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A} & \mathbf{Y}\mathbf{B} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \preceq 0. \end{aligned}$$

Kommen wir nun auf unser Ausgangsproblem (6) zurück. Der geschlossene Regelkreis hat die Struktur des allgemeinen Zustandraummodells (9). Ziel der Optimierung ist es eine Matrix $\mathbf{K}$ zu berechnen, so dass der geschlossene Regelkreis eine möglichst kleine $\mathcal{H}_\infty$-Norm besitzt. Mithilfe des bounded-real Lemmas kann dies nun als Optimierungsproblem mit bilinearen Matrixungleichungen modelliert werden:

$$\begin{aligned} &\min \gamma \\ &s.t.\ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathbf{T}} \\ &\quad 0 \prec \mathbf{Y} \\ &\quad 0 < \gamma \\ &\quad 0 \succcurlyeq \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Dieser Ansatz bietet verschiedene Vorteile. Zunächst ist die Modellierung unabhängig von der Struktur, an die die Tilger gebracht werden sollen. Sie muss nur durch ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell beschreibbar sein. Außerdem werden durch das Lösen des Optimierungsproblems alle Tilgerparameter simultan bestimmt. Das bedeutet insbesondere, dass mögliche Wechselwirkungen automatisch mit berücksichtigt werden. Nachteil dieser Modellierung ist jedoch, dass das Optimierungsproblem aufgrund der bilinearen Matrixungleichungen nicht konvex ist. Aus diesem Grund ist die Berechnung einer Lösung schwierig und bei größeren Systemen sehr zeitaufwändig. Es gibt bisher nur wenige Algorithmen für derartige Optimierungsprobleme. Einer von ihnen ist der von Kocvara und Stingl entwickelte und in *PENBMI* implementierte Algorithmus ([3]). Erste Rechnungen an einer kleinen Struktur brachten gute Ergebnisse. Bei der Übertragung des Ansatzes auf das Stabwerk, das im Rahmen des AdRIA-Projekts entwickelt wurde, traten beim Lösen des Optimierungsproblems mit *PENBMI* numerische Schwierigkeiten auf, so dass keine zufriendenstellenden Ergebnisse berechnet werden konnten. Eine Weiterentwicklung des Algorithmus ist essentiell. Heuristische Vorberechnungen zeigten, dass die $\mathcal{H}_\infty$-Norm als Gütemaß zur globalen Dämpfung von Schwingungen sehr gut geeignet ist.

Danksagung

Die in diesem Paper präsentierten Ergebnisse entstanden am LOEWE-Zentrum AdRIA (Adaptronic-Research, Innovation, Application). Dieses vom Land Hessen geförderte Projekt unterliegt der Leitung des Fraunhofer LBF. Wir danken für diese Unterstützung

Literatur

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, 1994.

[2] J. P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Dover Pubn Inc, 1985.

[3] M. Kocvara and M. Stingl. Pennon - a code for convex nonlinear and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, Vol. 8:317–333, 2003.

[4] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, Vol. 10:363–385, 2000.