Entwicklung und Parametrisierung eines Mode-Tracing Algorithmus für halbanalytische Solver

Fabian Bause, Jens Rautenberg, Bernd Henning[1]

Universität Paderborn, EIM-E, Elektrische Messtechnik, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn

[1]E-Mail: Henning@emt.upb.de

Einleitung

Die computergestützte Simulation geführter elastischer Wellen in ein- oder mehrschichtigen Wellenleitern ist in vielen Bereichen der akustischen Forschung ein essentielles Modellierungswerkzeug. Sie ermöglicht, auch in komplexen Systemen, eine Beschreibung der Wellenausbreitungsvorgänge, deren analytische Lösung zu aufwendig oder nicht durchführbar ist [1].

Im ersten Abschnitt dieses Beitrags wird auf den halbanalytischen Solver bzw. die mathematische Formulierung des die Wellenausbreitung beschreibenden Problems eingegangen. Der zweite Abschnitt beinhaltet den mehrstufigen Aufbau eines Tracing-Algorithmus, welcher den Lösungsraum des Solvers adaptiv einschränkt, so dass Leistungsfähigkeit und Robustheit des Gesamtalgorithmus gestärkt werden.

Der halbanalytische Solver

Den Kern des Algorithmus bildet ein halbanalytischer Solver, der, auf Basis der *Global Matrix Method*, das Problem der Wellenausbreitung von einer Beschreibung in Differentialgleichungsform in ein Nullstellenproblem wandelt [2][3]. Dazu werden alle Randbedingungen des betrachteten Wellenleiters in einer globalen Systemmatrix **G** gebündelt. Als Unbekannte trägt diese Matrix die Parameter Wellenzahl ξ und Frequenz f, welche über die Bedingung der Singularität von **G** berechnet werden können.

$$\det\left\{\mathbf{G}\left(\xi, f\right)\right\} = 0 \tag{1}$$

Die Lösung des Problems nach Gleichung (1) erfolgt beispielsweise durch Vorgabe einer Wellenzahl und der anschließenden Nullstellensuche in der entstehenden Funktion der Frequenz. Schwierigkeiten liegen hier in den Anforderungen der Nullstellensuchalgorithmen, die zumeist eine eingeschlossene Nullstelle fordern und außerdem in genau eine Nullstelle hinein konvergieren. Um alle Nullstellen respektive Frequenzlösungen zu jeder Wellenzahl zu erhalten, ist es notwendig, diese sukzessiv innerhalb beschränkter Suchintervalle zu berechnen.

Der Mode-Tracing Algorithmus

Der Mode-Tracer übernimmt die Aufgabe der Suchraumbeschränkung auf Basis der grundlegenden Anordnung der Lösungen im Dispersionsdiagramm. Es ist bekannt, dass sich im Dispersionsdiagramm zusammenhängende Lösungen ausbilden, welche sich durch eine gemeinsame Modenordnung auszeichnen. Diese ist wiederum maßgeblich verantwortlich für die Modenform über den Wellenleiterquerschnitt. Ansatz des Mode-Tracers ist, den Suchraum der Nullstellensuche auf die Verfolgung einzelner Moden zu beschränken.

Die Suchraumbeschränkung erfolgt durch Prädiktion einer konsekutiven Frequenzlösung (Laufindex *i*) und anschließender Bildung eines Suchintervalls um diesen Schätzwert, welcher mit Hilfe einer quadratischen Extrapolation entlang bekannter Werte der Mode *j* und ihrer Auswertung an der Prädiktionsstelle $\xi_{j,i+1} = \xi_{j,i} + \Delta\xi_i$ erstellt wird. Von großer Bedeutung für die Stabilität des Algorithmus ist die Prädiktionsschrittweite $\Delta\xi_i$. Die Definition einer robusten Prädiktionsschrittweite ist pauschal nicht möglich, sondern muss adaptiv an die Form der Mode im Diagramm (vgl. Abb. 3) angepasst werden. Als Parameter eignen sich beispielsweise Steigung v_{gr} und Krümmung $\partial_f v_{gr}$ der Modenkurve. Des Weiteren wird die Steigung der Phasengeschwindigkeit $\partial_f v_{ph}$ berücksichtigt, da sich diese als robuster Indikator für das Verlassen des schwierig zu verfolgenden Frequenzbereichs zwischen Cut-Off Frequenz und Erreichen einer stabilen Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit herausgestellt hat. Während die Steigung v_{gr} als Faktor in die Adaptionsvorschrift eingeht, finden Krümmung $\partial_f v_{gr}$ und Steigung der Phasengeschwindigkeit $\partial_f v_{ph}$ im Exponenten der Exponentialfunktion, gewichtet mit α_{ph} bzw. α_{gr}, ihre Berücksichtigung. Zur Vermeidung großer Sprünge in der Schrittweitenbestimmung wird zur Tiefpassfilterung der exponentielle Glättungskoeffizient β eingeführt. Mit dem Beschleunigungsfaktor γ, welcher eine maximale Schrittweite von $\left(1+\gamma\right)\Delta\xi_{\min}$ impliziert, und der Bulkwellengeschwindigkeit c_0, die sich direkt aus den Parametern des verwendeten Wellenleitermaterials berechnen lässt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta\xi_i &= \beta \frac{c_0}{2\pi v_{gr,i}} \Pi + \left(1-\beta\right)\Delta\xi_{i-1} \\
\Pi &= \Delta\xi_{\min} + \mathrm{e}^{-\alpha_{ph}\left|\partial_f v_{ph,i}\right|} \mathrm{e}^{-\alpha_{gr}\left|\partial_f v_{gr,i}\right|} \cdot \gamma\Delta\xi_{\min}
\end{aligned} \tag{2}$$

Neben der quadratischen Extrapolation (q) wird an derselben Prädiktionsstelle eine lineare Extrapolation (lin) durchgeführt, anhand derer die Unsicherheit der Prädiktion und somit die Suchintervallgröße abgeschätzt werden kann (vgl. auch Abb. 1). Durch Differenzbildung der beiden prädizierten Frequenzlösungen und Einbeziehung der Toleranzfaktoren $\alpha_{\mathrm{intv}}^{\mathrm{down}} > 1$ und $\alpha_{\mathrm{intv}}^{\mathrm{up}} > 1$, ergibt sich das dem Solver zu übergebende Suchintervall zu:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \left|\hat{f}_{j,i+1,\mathrm{q}} - \hat{f}_{j,i+1,\mathrm{lin}}\right| \\
\mathrm{Intv} &= \left[\hat{f}_{j,i+1,\mathrm{q}} - \alpha_{\mathrm{intv}}^{\mathrm{down}}\Delta f, \hat{f}_{j,i+1,\mathrm{q}} + \alpha_{\mathrm{intv}}^{\mathrm{up}}\Delta f\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

Ist im Prädiktionsbereich eine negative Gruppengeschwindigkeit ausschließbar (Voraussetzung: Die lineare Approximation der Modenkurve im Dispersionsdiagramm ist möglich), kann das aufgespannte Suchintervall um die geschätzte Lösung $\hat{f}_{j,i+1,q}$ nach unten bis zur letzten Lösung $f_{j,i}$ weiter eingeschränkt werden.

Verfahrensbedingte Probleme des Mode-Tracings treten ein, wenn Moden sehr nahe beieinander liegen und somit mehrere Lösungen im zuvor vorbereiteten Intervall auftreten. Zum einen muss dann sichergestellt werden, dass alle Nullstellen im Intervall gefunden werden und zum anderen muss eine Validierungsstufe über die korrekte Lösung aus dem Lösungsvektor entscheiden. Um multiple Nullstellen in einem Intervall zu finden, muss selbiges, z. B. eingebettet in einen Frequenz-Sweep, auf Vorzeichenwechsel untersucht und die entsprechenden Bereiche einer Nullstellensuche unterzogen werden. Über einen mehrstufigen Validierungsprozess kann dann eine Filterung des Lösungsvektors angesetzt werden. In einem ersten Schritt wird das multiple Finden einer Lösung unterbunden. Wurden schon Modenverläufe berechnet, kann es dazu kommen, dass eine bereits gefundene, zu einer vorherigen Mode gehörige Lösung im Suchintervall der aktuell verfolgten Mode liegt. Es liegt nahe, diese Frequenz als mögliche Lösung auszuschließen, um ein Ineinanderlaufen der Moden zu verhindern. Wie in Abb. 1 dargestellt, ist es auf Grund der adaptiven Berechnung der Prädiktionsschrittweite unwahrscheinlich, dass bereits erstellte Modenverläufe eine Stützstelle auf der aktuellen Prädiktionsstelle besitzen, was durch eine Interpolation auf die aktuelle Suchposition bewältigt werden kann. Diese Validierungsstufe setzt voraus, dass die vorherigen Modenverläufe korrekt berechnet wurden, so dass es notwendig ist, einen Spurhalteassistenten für das Mode-Tracing einzuführen. Wie im obigen Teil erwähnt, unterscheiden sich Moden in ihrer Modenordnung, welche im Wesentlichen angibt, wie viele Wellenlängen einer Ansatzfunktion in die Geometrie des Wellenleiters transversal zur Ausbreitungsrichtung passen. Daraus folgt, dass zwei konsekutive Lösungen einer Mode eine stärkere Korrelation bezüglich ihrer Form über den Wellenleiterquerschnitt besitzen als Lösungen von zwei unterschiedlichen Moden. Die in Ausbreitungsrichtung zeigende Leistungsdichte hat sich als robuster Indikator für dieses Merkmal herausgestellt (Abb. 2) und kann über die Bildung des Korrelationskoeffizienten zwischen der Leistungsdichte der letzten bekannten Lösung und der der Lösungskandidaten realisiert werden.

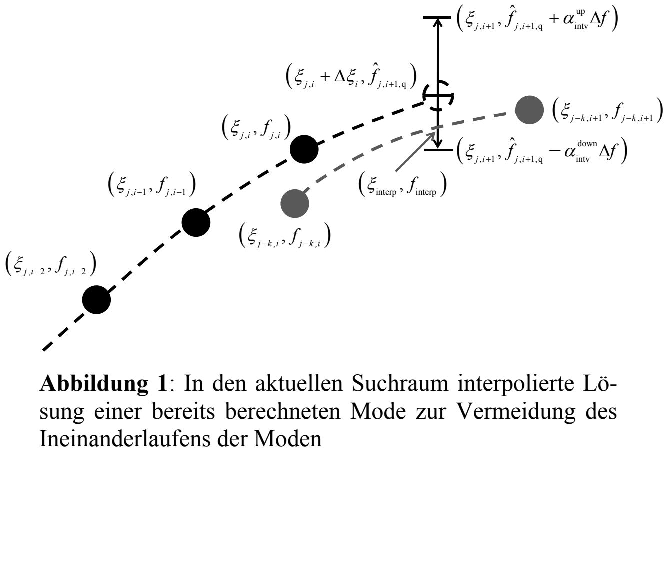

Abbildung 1: In den aktuellen Suchraum interpolierte Lösung einer bereits berechneten Mode zur Vermeidung des Ineinanderlaufens der Moden

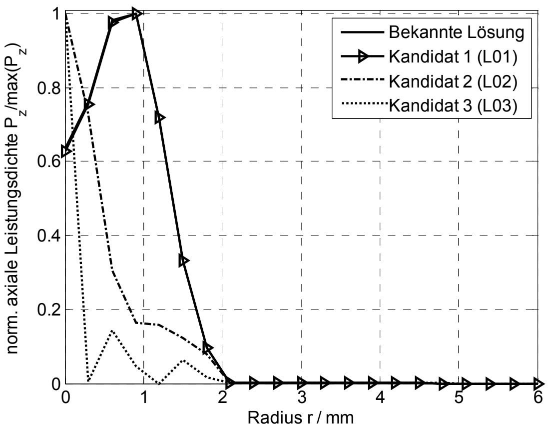

Abbildung 2: Leistungsdichteverteilung der Moden L_{01} bis L_{03} eines zylindrischen zweischichtigen Wellenleiters

Ergebnisse

Erste Ergebnisse für ein- und mehrschichtige Wellenleiter wurden erstellt und erfolgreich mit der kommerziellen Software Disperse verglichen. Es ist gelungen einen robusten Tracing-Algorithmus unter MATLAB® zu implementieren, welcher die Defizite der Nullstellensuchalgorithmen ausgleicht. Im Bereich großer Frequenz-Schichtdicke-Kombinationen hat sich der vorgestellte Algorithmus, auf Kosten der Rechenzeit, sogar als robuster als Disperse erwiesen (vgl. Abb. 3).

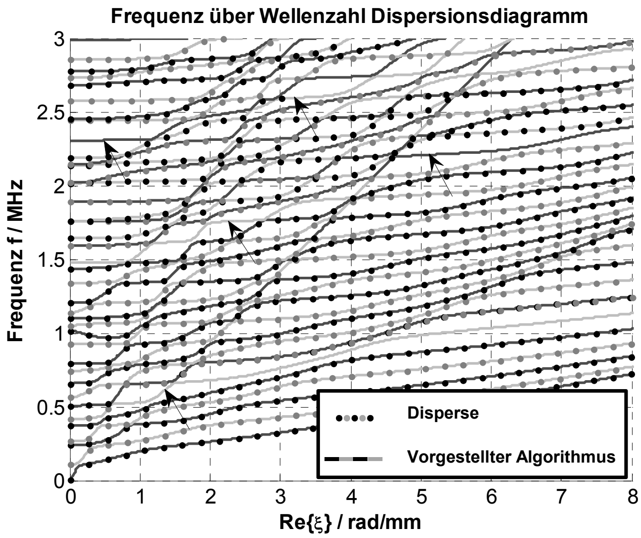

Abbildung 3: L-Moden eines zylindrischen zweischichtigen Wellenleiters (radial 2 mm Teflon und 3 mm Titan)

Literatur

[1] Seco, F. J. M. et al: *PCDISP: A tool for the simulation of wave propagation in cylindrical waveguides*. 9th International Congress Sound Vibration, Orlando, 2002

[2] Pavlakovic, B., Lowe, M. J. S.: *Disperse: A System for Generating Dispersion Curves. User's Manual.* Non-Destructive Testing Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, 2003

[3] Lowe, M. J. S.: *Matrix Techniques for Modeling Ultrasound Waves in Multilayered Media.* IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics Frequency Contol, Vol. 42, No. 4, 1995