

Untersuchungen mit einem hybridisierten Finite Elemente / Finite Differenzen Simulationsverfahren im Zeitbereich zur Modellierung akustischer Grenzübergänge

Christian Kleinhenrich¹, Sönke Schäfer¹, Tobias Weigler¹, Detlef Krahe¹

¹ Bergische Universität Wuppertal, 42119 Wuppertal, E-Mail: c.kleinhenrich@uni-wuppertal.de

Einleitung

Die Finite Differenzen Methode im Zeitbereich (Finite Differences in the Time Domain, FDTD) liefert gute Ergebnisse in Simulationen tieffrequenter Schallausbreitung in Räumen. Problematisch hingegen ist die Modellierung von Grenzübergängen unter Berücksichtigung frequenzabhängiger Reflexion, Absorption und Transmission. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich bei realitätsnahen Simulationen von Schallquellen. In diesem Paper werden Untersuchungen zur virtuellen Ankopplung zweier räumlich getrennter Schallfelder vorgestellt, die Methoden der Finiten Elemente und Finite Differenzen kombinieren. Die Beurteilung der Simulationsergebnisse wird anhand von Messungen überprüft.

Die Zielsetzung der Schallfeldsimulationen ist im Zusammenhang der Optimierung von Active Noise Control Systemen (ANC) in Räumen zu sehen. Beabsichtigt sind Simulationen im Zeitbereich, die das Verhalten der aktiven Lärminderung im Zusammenspiel mit der Schallausbreitung am jeweiligen Aufstellungsort vorhersagen und so eine Anpassung der Mikrofon- und Lautsprecherpositionen, sowie der systemspezifischen Regelparame-ter bereits in der Planungsphase erlauben. Bisher kam für Simulationen der Schallfeldausbreitung die FDTD-Methode zum Einsatz, die gegenüber anderen Methoden eine effiziente Implementierung gestattet und durch ihre Parallelisierbarkeit Rechenzeiten deutlich vermindert. Ungünstig ist hingegen das Auftreten von numerischen Fehlern an gekrümmten Randstrukturen. Auch ist die Simulation von Grenzübergängen problematisch. Aus diesen Gründen sollen die Schwächen der FDTD durch Simulationen mit der Finite Elemente Methode im Zeitbereich ausgeglichen und ein kombiniertes Verfahren – vorerst nur für den eindimensionalen Fall - vorgestellt werden.

FDTD

Die Methode der Finiten Differenzen im Zeitbereich beruht auf der Taylorreihenentwicklung. In den Gleichungen (1) und (2) wurden die Erhaltungsgleichungen zeitlich und räumlich diskretisiert [1]:

$$p_x^{n+1} = p_x^n - \frac{\rho_0 c^2 \Delta t}{h} \{v_{x+1/2}^{n+1/2} - v_{x-1/2}^{n+1/2}\} \quad (1)$$

$$v_{x+1/2}^{n+1/2} = v_{x+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\rho_0 h} \{p_{x+1}^n - p_x^n\} \quad (2)$$

Das daraus resultierende Gitter für Druck und Schnelle liegt jeweils einen halben Schritt im Orts- und Zeitbereich auseinander (siehe Abbildung 1).

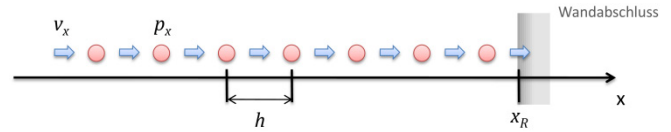


Abbildung 1: Resultierendes eindimensionales FDTD-Gitter. Druck- und Schnelle-Punkte sind um einen halben Rasterabstand versetzt.

Die Berechnung der Schnelle auf dem Wandabschluss kann bei bekanntem Impedanzwert Z_W mit folgender Gleichung durchgeführt werden [2]:

$$v_{x_R}^{n+1/2} = v_{x_R}^{n-1/2} \frac{h\rho_0/\Delta t - Z_W}{h\rho_0/\Delta t + Z_W} + \frac{2}{h\rho_0/\Delta t + Z_W} p_{x_R-1/2}^n \quad (5)$$

FETD

Für die Herleitung der Finiten Elemente im Zeitbereich (FETD) wurde ein expliziter Ansatz gewählt. Die zugrunde liegende Differentialgleichung beschreibt die eindimensionale Schallausbreitung in einem porösen Absorber als Wellengleichung mit einem Dämpfungsterm [3]:

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\frac{R_L}{\chi \rho_0} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = c_a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (6)$$

Darin ist σ_v die Porosität, R_L der längenbezogene Strömungswiderstand, χ der Strukturfaktor und c_a die Schallgeschwindigkeit im Absorber [3]. Die zeitabhängigen Terme der gedämpften Wellengleichung werden ebenfalls anhand einer Taylorreihenentwicklung diskretisiert [4]:

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(\frac{R_L}{\chi \rho_0} \right) \frac{p^{n+1} - p^{n-1}}{\Delta t} = c_a^2 \nabla^2 p^n \quad (8)$$

Multipliziert man Ausdruck (8) mit einer Testfunktion w und integriert über das Lösungsgebiet Ω , erhält man die schwache, zeitdiskrete Form der Helmholtzgleichung mit Dämpfungsterm [5]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [1 + \lambda] w p^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} 2w p^n d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla^2 p^n w d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} [\lambda - 1] w p^{n-1} d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Mit } \lambda = \frac{1}{2} \frac{R_L \sigma_v \Delta t}{\chi \rho_0} \quad \text{und} \quad \mu = \sigma_v \Delta t^2 c_a^2$$

Nach partieller Integration, Anwendung des zweiten Greenschen Integralsatzes und der Galerkin-Formulierung kann Gleichung (9) als Überlagerung von linearen Ansatzfunktionen N_j für N Elemente beschrieben werden [5]. In Matrixschreibweise folgt mit der Massenmatrix \underline{M} , der Steifigkeitsmatrix \underline{K} und der Matrix der Robin-Randbedingungen \underline{B} :

$$\vec{p}^{n+1} \left[\underline{M} + \lambda \underline{M} + \frac{\mu}{2c_a \Delta t} \underline{B} \right] = 2 \underline{M} \vec{p}^n - \mu \underline{K} \vec{p}^n + \left[\lambda \underline{M} - \underline{M} + \frac{\mu}{2c_a \Delta t} \underline{B} \right] \vec{p}^{n-1} \quad (10)$$

Gleichung (10) wird für eine Schallfeldsimulation in jedem Zeitschritt gelöst und hängt von den zwei vergangenen Knotenwerten \vec{p}^n und \vec{p}^{n-1} ab.

Ankopplung beider Verfahren (FD-FE-TD)

Für die Ankopplung der FETD an die FDTD wurde ein Superpositionsansatz verwendet. Vorerst werden beide Bereiche getrennt voneinander betrachtet. Die Randbedingungen werden so gewählt, dass Impedanzanpassung gilt und eine sich in den Gebieten ausbreitende Welle nicht an den Rändern reflektiert wird. Nun werden beide Gitter an den Rändern überlagert, sodass sich ein gemeinsamer Druckpunkt p_{x_R} , wie in Abbildung 2 dargestellt, ergibt. An diesem Punkt gilt der Superpositionsansatz, dem zufolge für jeden Zeitschritt $n = 1, 2, 3, \dots$ die Druckwerte an den Knotenpunkten \vec{p}_{FD}^n und \vec{p}_{FE}^n in den jeweiligen Lösungsgebieten bestimmt und anschließend auf folgende Weise überlagert werden:

$$\tilde{p}_{x_R,FE}^{n+1} = p_{x_R,FE}^{n+1} + p_{x_R,FD}^{n+1} - \sum_{m=0}^n I_{FE}^{n-m+1} p_{x_R,FD}^m \quad (11)$$

$$\tilde{p}_{x_R,FD}^{n+1} = \tilde{p}_{x_R,FE}^{n+1} - \sum_{m=0}^n I_{FD}^{n-m+1} p_{x_R,FE}^m \quad (12)$$

Darin sind I_{FD} und I_{FE} die Impulsantworten des jeweiligen Rasters, mit denen der zu überlagernde Wert gefaltet und von der Summe subtrahiert werden muss, um Fehler durch Grid-Impulsantwort zu minimieren [6].

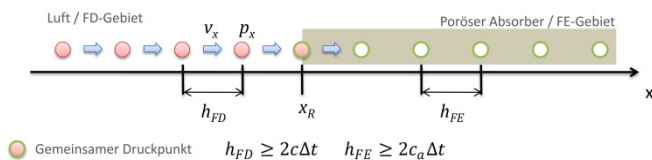


Abbildung 2: Ankopplung des FDTD- und FETD-Gitters mit gemeinsamen Superpositionspunkt an der Stelle x_R .

Bewertung der Ergebnisse

Abbildung 3 zeigt die zeitlich gemittelte Schalldruckverteilung einer Simulation in Matlab® bei 800 Hz über einen Zeitraum von 25 ms. Der gelb hinterlegte Bereich stellt den porösen Absorber in der FETD-Simulation, die weiß hinterlegte Bereiche stellen Luft in der FDTD-Simulation dar. Es ist zu erkennen, dass sich im linken Teil, in dem sich die anregende Quelle befindet, eine typische

Druckverteilung von Maxima und Minima als Resultat der Überlagerung von hinlaufender und rücklaufender Welle ergibt. Innerhalb des Absorbers wird die Schallausbreitung stark gedämpft und im rechten Teilbereich zeigt sich eine konstante Druckverteilung durch die ebene Schallausbreitung. Für die Simulation wurden ein Strömungswiderstand von 67500 Ns/m^4 , eine Porosität von 0,94 und ein Strukturfaktor von 2,1 angenommen. Diese Werte ergeben in der Simulation im Bereich von 400 Hz bis 800 Hz Dämpfungen durch den Absorber, die nur wenige Dezibel von den Vergleichs-Messungen abweichen.

Die Implementierung zeigte, dass sich an dem Grenzübergang zwischen FDTD- und FETD-Bereich leichte, ungewollte Reflektionen ergeben und der Ansatz dahingehend weiterer Überarbeitung bedarf. Die Stabilität der Simulationen hängt zudem im FETD-Bereich stark von der Wahl der Elementlänge im Verhältnis zur zeitlichen Schrittweite und von der Impedanz der Schallquelle ab. Daher ist beabsichtigt, das Newmark-Verfahren zu implementieren, das implizit stabil ist.

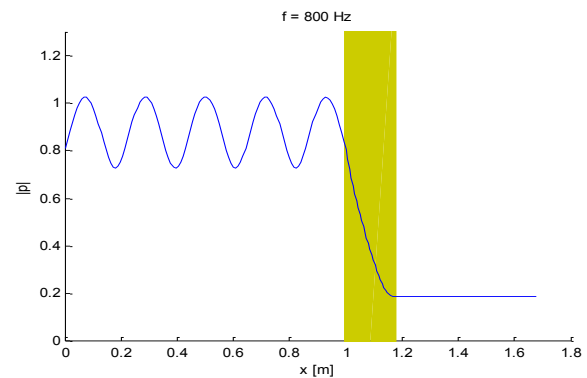


Abbildung 3: Zeitlich gemittelter Schalldruckverlauf von Luft (FDTD) zu por. Absorber (FETD) zu Luft (FDTD).

Literatur

- [1] J.G. Meloney, K.E. Cummings: Adaption of FDTD techniques to acoustic modelling. 11th Annu. Rev. Prog. Applied Computational Electromagnetics 2 (1995) 724.
- [2] S. K. Olesen: Low-Frequency Room Simulation Using Finite Difference Equations. 102nd Conv. of the Audio Eng. Society, J. Audio Eng.Soc., vol. 45p. 405 (1997 May), preprint 4422.
- [3] F. Fahy, J. Walker: Fundamentals of Noise and Vibration. E&FN Spon, London (1998).
- [4] Bounaïm et al.: Quantification of the CARI breast imaging sensitivity by 2D/3D numerical time-domain ultrasound wave propagation. Mathematics and Computers in Simulation 65 (2004) 521-534.
- [5] T.J.R. Hughes: The Finite Element Method. Reprint, Dover Publications, Mineola (2000).
- [6] J.B. Schneider et al.: Implementation of transparent sources embedded in acoustic finite difference time domain grids. J. Acoust. Soc. Am. 133 (1998) 136-142.