

Zusammenhänge zwischen wellen- und geometrie-basierten Darstellungen von Schallfeldern

Paolo Annibale, Rudolf Rabenstein

Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung, Universität Erlangen-Nürnberg
91058 Erlangen, Deutschland, Email: {annibale,rabe}@LNT.de

Einleitung

Für die Darstellung von Schallfeldern gibt es eine Reihe von Darstellungen, die teilweise auf der Wellennatur des Schalls und teilweise auf Analogien zur Strahlenoptik beruhen. Zu den wellen-basierten Darstellungen gehören die akustische Wellengleichung, Integraldarstellungen mit der Greenschen Funktion und Entwicklungen in zirkuläre und sphärische Harmonische. Geometrie-basierte Methoden umfassen Ray Tracing und Beam Tracing und verschiedene Erweiterungen davon. Die Beziehungen zwischen diesen Darstellungen sind wenig bekannt. Dieser Beitrag stellt einige Zusammenhänge zwischen wellen- und geometrie-basierten Darstellungen aus der Sichtweise der mehrdimensionalen Systemtheorie her. Die Beschreibung akustischer Signale im Zeit- und Ortsbereich und in den zugeordneten Frequenzbereichen [1] eröffnet die notwendigen Möglichkeiten für geometrische Interpretationen.

In den folgenden Abschnitten können diese Verbingungen nur äußerst kurz und beispielhaft angerissen werden. Der Einfachheit halber wird eine örtlich zweidimensionale Darstellung gewählt. Dazu kommt eine dritte Koordinate, die je nach Betrachtungsweise unterschiedliche Bedeutung hat.

Der Abschnitt über projektive Geometrie beschreibt die Verschiebung einer Geraden als Repräsentant einer Wellenfront. Die Darstellung in homogenen Koordinaten stellt die Parallele zur Fourier-Akustik im folgenden Abschnitt her. Die dritte Koordinate ist hier die sog. homogene Koordinate der projektiven Geometrie.

Der Abschnitt über Fourier-Akustik beschreibt eine ebene Welle und ihre Darstellung im Frequenzbereich bezüglich des Orts und der Zeit. Die dritte Koordinate ist hier die Zeit bzw. die zugeordnete Frequenzvariable. Ein Vergleich mit der Darstellung in homogenen Koordinaten zeigt die Gemeinsamkeiten auf.

Projektive Geometrie

Die geometrische Betrachtung beginnt mit einer Geraden durch den Ursprung mit dem Normalenvektor $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2]^T$ nach Abb. 1. Ihre Bestimmungsgleichung lautet in homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = n_1 x + n_2 y = 0, \quad (1)$$

wobei h hier eine redundante homogene Koordinate der projektiven Geometrie darstellt.

Eine Verschiebung des Koordinatensystems in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n} um

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = c\mathbf{n} \quad (2)$$

läßt sich in homogenen Koordinaten durch eine Matrixmultiplikation darstellen. Die verschobenen Koordinaten x', y', h' ergeben sich durch

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Eine Gerade durch den Ursprung des verschobenen Koordinatensystems ist dann gleich der verschobenen Geraden im ursprünglichen Koordinatensystem

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} \quad (4)$$

mit $\Delta x n_1 + \Delta y n_2 = c(n_1^2 + n_2^2) = c$.

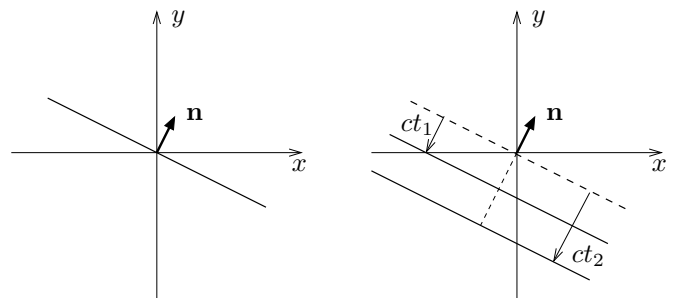


Abbildung 1: Links: Gerade durch den Ursprung mit dem Normalenvektor \mathbf{n} . Rechts: Verschiebung um ct für zwei verschiedene Zeitpunkte t_1 und t_2 .

Um die Parallelen zur Ausbreitung ebener Wellen aufzuzeigen, wird jetzt die homogene Koordinate h als Zeit t interpretiert und die Länge c des Verschiebungsvektors in (2) als Schallgeschwindigkeit. Daraus resultiert die Darstellung einer geraden Wellenfront mit den Koordinaten $(x, y, t) = (\mathbf{x}, t)$ die sich mit der Zeit entgegen der Richtung von \mathbf{n} mit der Geschwindigkeit c bewegt.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{n}^T \mathbf{x} + ct = 0. \quad (5)$$

Die linke Seite von (5) ist die analytische Beschreibung dieser Wellenfront in homogenen Koordinaten, die rechte

Seite ist die entsprechende Hessesche Normalform. Die Elemente \mathbf{n} und c des Parametervektors nennt man auch die Darstellung der Geraden im sog. dualen Raum (ray space) nach [3].

Diese duale Darstellung ist nur eindeutig bis auf einen konstanten Faktor. Wählt man diesen als $k_0 = \omega_0/c$ ohne k_0 und ω_0 noch eine physikalische Bedeutung zu geben, so lautet die duale Darstellung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = 0. \quad (6)$$

Die gewählte Bezeichnungsweise läßt bereits den Zusammenhang zur Fourier-Akustik ahnen, der im nächsten Abschnitt deutlich wird.

Fourier-Akustik

Eine völlig andere Betrachtungsweise nimmt die Fourier-Akustik ein. Der übliche Ausgangspunkt ist die ebene Welle einer bestimmten (Kreis-)frequenz ω_0 und mit einer bestimmten Richtung θ_0 . Diese Größen werden oft zum Wellenvektor \mathbf{k}_0 zusammengefasst

$$\mathbf{k}_0 = \frac{\omega_0}{c} \mathbf{n}_0 = \frac{\omega_0}{c} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Die komplexe Darstellung der ebenen Welle lautet dann

$$u_0(t, \mathbf{x}) = e^{j(\mathbf{k}_0^T \mathbf{x} + \omega_0 t)}. \quad (8)$$

Fourier-Transformation bezüglich Zeit und Ort

$$\begin{aligned} \bar{U}_0(\omega, \mathbf{k}) &= \mathcal{F}_{t, \mathbf{x}} \{ u_0(t, \mathbf{x}) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, \mathbf{x}) e^{-j(\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \omega t)} \, d\mathbf{x} \, dt \end{aligned} \quad (9)$$

führt auf die Frequenzbereichsdarstellung der ebenen Welle

$$\bar{U}_0(\omega, \mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0). \quad (10)$$

Das Produkt der beiden Distributionen (Delta-Funktionen) $\delta(\omega - \omega_0)$ und $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ (s. [4, 5]) stellt einen Punkt im dreidimensionalen Frequenzraum (k_1, k_2, ω) dar, wie in Abb. 2 gezeigt.

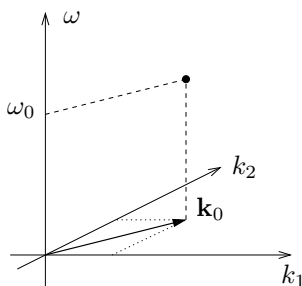


Abbildung 2: Fourier-Transformation einer ebenen Welle in den Frequenzbereich bezüglich Ort und Zeit.

Zusammenfassung

Die Darstellungen nach (6) und (10) zeigen, dass sowohl der Ansatz der projektiven Geometrie als auch die Fourier-Akustik auf sehr ähnliche Parameterdarstellungen führen. Dazu ist die bewegte Gerade aus Abb. 1 als Wellenfront, d.h. gemäß (8) als Ebene konstanter Phase

$$\mathbf{k}_0^T \mathbf{x} + \omega_0 t = \text{const} \quad (11)$$

zu interpretieren. Der Parameterraum der projektiven Geometrie besteht aus den drei Dimensionen der Parametervektoren (\mathbf{n}_0, c) bzw. (\mathbf{k}_0, ω_0) in (6). Die dritte Dimension wird hier durch die homogene Koordinate erzeugt, der aber keine physikalische Natur zukommt. Im geometrischen Kontext sind c bzw. ω_0 und t lediglich Parameter, die alle möglichen Verschiebungen der Geraden aus Abb. 1 erfassen. In der Fourier-Akustik hat eine durch (11) definierten Wellenfront eine allgemeinere Bedeutung. Sie ist hier eine Ebene konstanter Phase einer Welle nach (8) mit einem Wellenvektor \mathbf{k}_0 und einer Kreisfrequenz ω_0 . Daraus erhält man direkt den dreidimensionalen Frequenzraum nach Abb. 2 mit der entsprechenden physikalischen Bedeutung aller Achsen.

Die damit gelegten Zusammenhänge zwischen wellen- und geometriebasierten Darstellungen von Schallfeldern sind der Ausgangspunkt für weitere Analogien. Die sogenannte *orientierte projektive Geometrie* erlaubt die Unterscheidung zwischen ein- und auslaufenden Wellen und zwischen Schallquellen und -empfängern. Sie eröffnet neue Ansätze für die Raum-Zeit-Verarbeitung akustischer Signale [2].

Danksagung

Diese Arbeiten wurden im Rahmen des SCENIC-Projekts gefördert durch das Future and Emerging Technologies (FET) Programme des 7. Forschungsrahmenprogramms der Europäischen Kommission, FET-Open grant number: 226007.

Literatur

- [1] Annibale, P., Rabenstein, R., Spors, S., Steffen, P.: A Short Review of Signals and Systems for Spatial Audio, *Proc. European Signal Processing Conference, (EUSIPCO)*, Glasgow, Scotland, August 24-28, 2009
- [2] Antonacci, F., Sarti, A., Tubaro, S.: Acoustic Reconstruction of the Geometry of an Environment Through Successive Acquisitions of a Controlled Emission, *Proc. IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, (WASPAA)*, New Paltz, NY, October 18-21, 2009
- [3] Hartley, R., Zisserman, A.: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003
- [4] Bamler, R.: *Mehrdimensionale lineare Systeme: Fourier-Transformation und Delta-Funktionen*, Springer Verlag, 1989
- [5] Bracewell, R.: *Fourier Analysis and Imaging*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003