

# Reflexion und Transmission von Körperschall an Unstetigkeiten in Zylinderstrukturen

Helge Sprenger, Stefan Bischoff, Lothar Gaul

Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik, Universität Stuttgart

Email: {sprenger, bischoff, gaul}@iam.uni-stuttgart.de

## Einleitung

Die Ausbreitung von Körperschall in zylindrischen Strukturen hat, vergleichbar mit Wellen in Platten (Lamb-Wellen) multimodalen dispersiven Charakter. Werden Körperschallwellen zur Schadensdetektion eingesetzt, z. B. bei der Strukturüberwachung von Seilstrukturen [1], ist genaue Kenntnis der Ausbreitungs- und Reflexionseigenschaften der Körperschallwellen vonnöten. Diese lassen sich mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) ermitteln, indem ein Segment des periodischen Wellenleiters modelliert wird. Als Lösung erhält man alle sich in dem entsprechenden zylindrischen Wellenleiter auftretenden Ausbreitungsmoden sowie lokal auftretende und evaneszente Moden.

Interessiert insbesondere die Reflexion und Transmission von Körperschallwellen an Unstetigkeiten wie z. B. Rissen oder Kerben, erhält man die entsprechenden Reflexions- und Transmissionskoeffizienten durch Aufstellen der Rand- und Stetigkeitsbedingungen an der Fehlstelle.

Die präsentierten Ergebnisse zeigen die Umwandlung von Ausbreitungsmoden an Fehlstellen und ermöglichen die Identifizierung geeigneter Wellentypen zur Strukturcharakterisierung. Umgekehrt lassen sich mit den ermittelten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus Messsignalen von Ultraschallwellen Fehlstellen nicht nur lokalisieren sondern auch in gewissen Maße in ihrer Geometrie charakterisieren.

## Wellenausbreitung in Zylinderstrukturen

In zylinderförmigen Strukturen deren Längsausdehnung in  $x_3$ -Richtung den Radius weit übersteigt, treten geführte Wellen mit Verschiebungsfeld

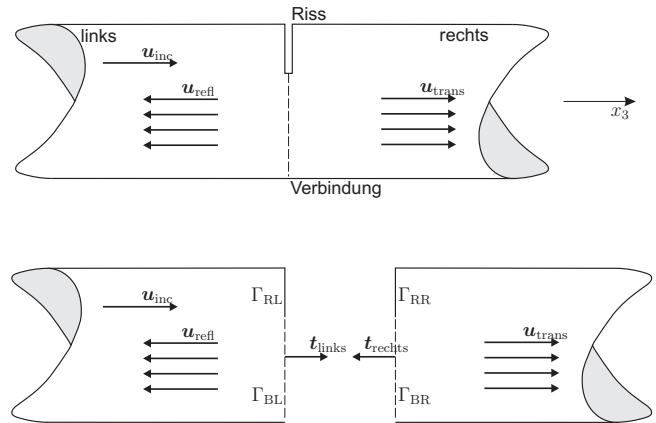
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(x_1, x_2) \exp(j(kx_3 - \omega t)) \quad (1)$$

und mechanischen Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(x_1, x_2) \exp(j(kx_3 - \omega t)) \quad (2)$$

auf. Aus einem diskretisierten Finite-Elemente-Modell des Wellenleiterquerschnitts lassen sich mithilfe einer Periodizitätsbedingung für eine gegebene Kreisfrequenz  $\omega$  Lösungen  $\{k_i, \hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\}$  berechnen, die mögliche Wellen im betrachteten Zylinder charakterisieren [2].

Im betrachteten Fall eines Zylinders treten drei Wellentypen auf: Longitudinal (L)-, Biege (F)- und Torsionsmoden.



**Abbildung 1:** Wellenleiter mit Fehlstelle. An der Position der Kerbe wird der Wellenleiter freigeschnitten sowie Rand- und Stetigkeitsbedingungen formuliert.

## Reflexion an Unstetigkeiten

Trifft eine geführte Welle in einem Wellenleiter auf eine Unstetigkeit, werden im Allgemeinen verschiedene Wellen reflektiert und transmittiert. Die Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen normiert auf die Amplitude der einfallenden Welle ergeben Reflexions- und Transmissionskoeffizienten. Diese hängen von der Geometrie der Unstetigkeit, vom Typ der hinlaufenden Welle und von der Frequenz ab.

Allgemein kann jedes Wellenfeld im Wellenleiter in die Basis der möglichen Moden zerlegt werden [3], so dass gilt

$$\mathbf{u} = \sum_n r_n \mathbf{u}_n \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_n r_n \boldsymbol{\sigma}_n.$$

Wird also die Reflexion und Transmission einer hinlaufenden Welle  $\mathbf{u}_{\text{inc}}$  betrachtet, setzen sich die Verschiebungsfelder links und rechts der Unstetigkeit gemäß Abb. 1 zusammen zu

$$\mathbf{u}_{\text{links}} = \mathbf{u}_{\text{inc}} + \sum_n r_{\text{refl},n} \mathbf{u}_n \quad \mathbf{u}_{\text{rechts}} = \sum_m r_{\text{trans},m} \mathbf{u}_m,$$

während die Spannungsvektoren an der Rissoberfläche

$$\mathbf{t}_{\text{links}} = \mathbf{t}_{\text{inc}} + \sum_n r_{\text{refl},n} \mathbf{t}_n \quad \mathbf{t}_{\text{rechts}} = \sum_m r_{\text{trans},m} \mathbf{t}_m$$

lauten. Die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}$  erhält man aus den Spannungstensoren  $\boldsymbol{\sigma}$  durch Multiplikation mit den Normalenvektoren der Schnittflächen,  $\mathbf{t}_{\text{links}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_{x_3}$ ,  $\mathbf{t}_{\text{rechts}} = -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_{x_3}$ .

Hierbei beschreiben

$n$  bzw.  $m \dots$  Indizes der nach links bzw. rechts laufenden

und nach links bzw. rechts abklingenden Wellen und  $r_{\text{refl}}$ ,  $r_{\text{trans}}$  ... Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen.

Werden sich ausbreitenden Wellen auf die Energie 1 normiert, so entsprechen  $r_{\text{refl}}$  und  $r_{\text{trans}}$  den gesuchten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten.

Im betrachteten Fall eines Risses im Wellenleiter gilt an der kräftefreien Rissoberfläche [4]

$$\mathbf{t}_{\text{links}}^{\Gamma_{\text{RL}}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{t}_{\text{rechts}}^{\Gamma_{\text{RR}}} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Stetigkeit an der Berührfläche wird berücksichtigt durch

$$\mathbf{t}_{\text{links}}^{\Gamma_{\text{BL}}} = -\mathbf{t}_{\text{rechts}}^{\Gamma_{\text{BR}}} \quad \mathbf{u}_{\text{links}}^{\Gamma_{\text{BL}}} = \mathbf{u}_{\text{rechts}}^{\Gamma_{\text{BR}}}. \quad (4)$$

Die wie oben beschrieben berechneten Verschiebungen und Spannungen der Wellenmoden (Gln. 1, 2) liegen in diskretisierter Form in Koordinaten des FE-Modells des Querschnitts vor. Werden diese nun nach Freiheitsgraden am Riss ( $\mathbf{u}^{\text{R}}$ ,  $\mathbf{t}^{\text{R}}$ ) und an der Berührfläche ( $\mathbf{u}^{\text{B}}$ ,  $\mathbf{t}^{\text{B}}$ ) partitioniert, und die Basen der nach links und nach rechts laufenden Wellen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{refl}} &= [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n] & \mathbf{U}_{\text{refl}} &= [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \\ \mathbf{T}_{\text{trans}} &= [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m] & \mathbf{U}_{\text{trans}} &= [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \end{aligned}$$

zusammengefasst, so ergeben die Bedingungen (3), (4) für spannungsfreie Oberfläche am Riss und Stetigkeit an der Berührfläche

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{refl}}^{\text{R}} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{\text{trans}}^{\text{R}} \\ \mathbf{T}_{\text{refl}}^{\text{B}} & \mathbf{T}_{\text{trans}}^{\text{B}} \\ \mathbf{U}_{\text{refl}}^{\text{B}} & -\mathbf{U}_{\text{trans}}^{\text{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{refl}} \\ \mathbf{r}_{\text{trans}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t}_{\text{inc}}^{\text{R}} \\ 0 \\ -\mathbf{t}_{\text{inc}}^{\text{B}} \\ -\mathbf{u}_{\text{inc}}^{\text{B}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Dieses lineare überbestimmte Gleichungssystem wird mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst und ergibt auf diese Weise die gesuchten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $\mathbf{r}_{\text{refl}}$  und  $\mathbf{r}_{\text{trans}}$ . Liegen die Beiträge der in Gl. (5) verwendeten Verschiebungs- und Spannungsvektoren in verschiedenen Größenordnungen, muss die vierte Zeile von (5) skaliert werden, so dass Spannungs- und Verschiebungsstetigkeitskriterien gleichermaßen erfüllt werden.

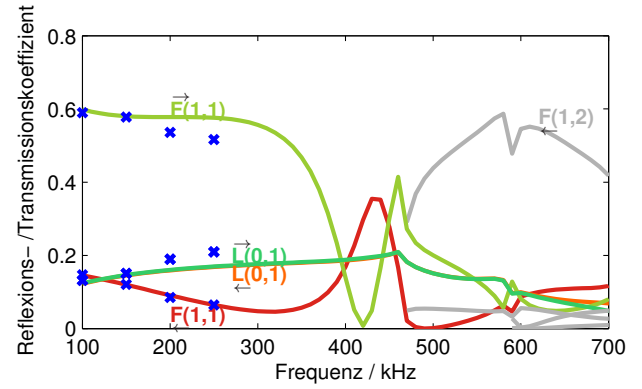
Die Güte der Lösung kann durch eine Energiebilanz evaluiert werden, die Summe der Energie der gestreuten Wellen muss der Energie der einfallenden Welle entsprechen.

## Ergebnisse

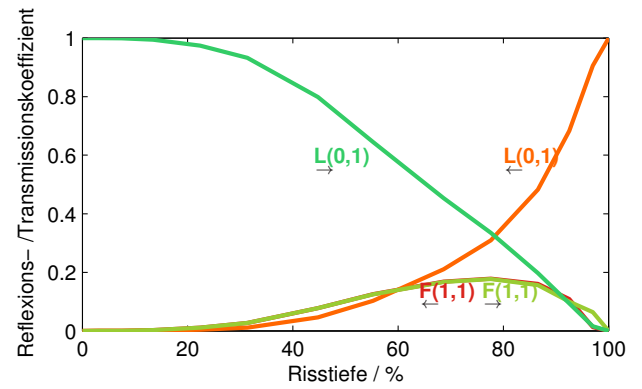
Abb. 2 und 3 zeigen mit dem vorgestellten Verfahren berechnete Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für einen Aluminiumzylinder mit Radius 2 mm. Die Ergebnisse wurden mithilfe transienter Simulationen für Anregungsfrequenzen  $f = \{100, 150, 200, 250\}$  kHz verifiziert.

## Zusammenfassung

Die beschriebene Vorgehensweise ermöglicht eine effiziente Berechnung von Reflexions- und Transmissionskoeffizienten zur Beschreibung von Streuvorgängen in Wellenleitern. Die gewonnenen Ergebnisse ermöglichen die



**Abbildung 2:** Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $r_{\text{refl}}^2$  und  $r_{\text{trans}}^2$  für eine auf einen Riss treffende Biegewelle (F). Risstiefe=Zylinderradius. Es werden jeweils eine Longitudinal (L)- und eine Biegemode (F) transmittiert und reflektiert. Vergleichsergebnisse aus transienten Simulationen sind durch  $\times$  markiert.



**Abbildung 3:** Reflexions- und Transmissionskoeffizienten  $r_{\text{refl}}^2$  und  $r_{\text{trans}}^2$  für eine auf einen Riss treffende Longitudinalmode (L) bei Frequenz  $f=100$  kHz. Risstiefe zwischen 0 und 100 % des Zylinderdurchmessers.

Identifikation geeigneter Wellenmoden und Frequenzbereiche zur Schadensdetektion und -charakterisierung in Wellenleitern.

## Literatur

- [1] Haag, T.; Beadle, B.M.; Sprenger, H.; Gaul, L.: Wave-based defect detection and interwire friction modeling for overhead transmission lines. *Archive of Applied Mechanics* 79 (2009), 517–528
- [2] Mace, B.R.; Duhamel, D.; Brennan M.J., Hinke, L.: Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America* 117 (2005), 2835–2843
- [3] Auld, B.A.: *Acoustic fields and waves in solids*, Krieger Publishing Co, 1990
- [4] Castaings, M.; Le Clézio, E.; Hosten, B.: Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb waves with cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America* 112 (2002), 2567–2582