

# Alternative BEM-Ansatzfunktionen in der Hydroakustik

Ingo Schäfer<sup>1</sup>

<sup>1</sup> WTD 71-FWG Forschungsbereich für Wasserschall und Geophysik

Berliner Strasse 115, 24340 Eckernförde, Email: ingo5schaefer@bwb.org

## 1 Einleitung

Zur Berechnung der akustischen frequenzabhängigen Rückstreustärke eines Unterwasserobjektes können verschiedene Verfahren genutzt werden. Zum einen bieten sich aufwändige klassische Verfahren (FEM / BEM) an, welche allerdings bei hohen Frequenzen wegen der benötigten feinen Elementierung hohe Rechenzeiten sowie großen Speicherbedarf benötigen, zum anderen können ebenfalls Hochfrequenz-Näherungsverfahren (Kirchhoff, PWA) genutzt werden, welche zwar geringeren Rechenzeiten unterliegen, aber dafür ungenauere Lösungen erzeugen. Um zu entscheiden, ob ein Hochfrequenz-Näherungsverfahren genutzt werden kann, wird in dieser Arbeit eine neue Ansatzfunktion für die BEM hergeleitet und erprobt, welche den Rechenbedarf der klassischen BEM durch Reduzierung der benötigten Elemente deutlich reduziert.

## 2 Akustische Rückstreustärke (TS)

Die akustische Rückstreustärke (TS) ist definiert als Verhältnis von einfallender zu reflektierter Schallintensität [2]. Um vergleichbare Werte zu erzielen, wird eine Schallquelle ins Fernfeld des Objektes gelegt und dann die Rückstreustärke, welche auf eine Entfernung von einem Meter zum Objekt zurückgerechnet wird, ermittelt. Sie genügt folgender Formel:

$$TS = 20 \log_{10} \left( \frac{p^s}{p^i} \right) \quad (1)$$

Dabei ist  $p^s$  die Druckamplitude des vom Objekt reflektierten Signals im Fernfeld und  $p^i$  die entsprechende Druckamplitude der einfallenden Welle. Bei bekanntem Druck und bekannter Schnelle auf dem Rand  $\Gamma$  des Unterwasserobjektes kann der rückgestreute Druck mit Hilfe des Kirchhoff-Integrals berechnet werden zu

$$p^s = \int \left[ g \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial g}{\partial n} \right] d\Gamma. \quad (2)$$

Hierbei ist die Funktion  $g$  die Fundamentallösung der Helmholtz-Gleichung.

## 3 Kirchhoff / Plane-Wave-Approximation

Das oben genannte Integral (2) verlangt Kenntnis über den Druck und die Schnelle auf der Oberfläche des Objektes. In Abhängigkeit von der Beschallungsrichtung kann eine

Beziehung zwischen  $p^s$  und  $p^i$  mittels eines Reflexionsfaktors hergestellt werden.

$$p^s = R p^i, \quad \frac{\partial p^s}{\partial n} = -R \frac{\partial p^i}{\partial n}, \quad p = p^s + p^i \quad (3)$$

Der Reflexionsfaktor gibt das Verhältnis von Druck und Schnelle von einfallender zu gestreuter Schallwelle unmittelbar auf der Oberfläche an und kann mittels der von Brekhovskikh [1] angegebenen Verfahren berechnet werden. Die Näherung beruht auf der Annahme, dass für jedes Element das Reflexionsgesetz für ebene Wellen und unendliche Platten angewandt wird. Aus diesem Grunde gilt es insbesondere für hohe Frequenzen und nur für konvexe Objekte. In dieser Arbeit wird nur der für sehr hohe Frequenzen relevante schallharte Fall ( $R = 1$ ) betrachtet. Für die Kirchhoff-Hochfrequenznäherung [3] gilt für den beschallten Oberflächenteil

$$p_{sca} = -2 \int_{\text{beschallt}} p^i \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma \quad (4)$$

während für die PWA-Hochfrequenznäherung [3] die Integration über die gesamte Oberfläche durchgeführt werden muss:

$$p_{sca} = - \int_{\text{gesamt}} (1 - \cos(\varphi)) p^i \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma \quad (5)$$

Der Winkel  $\varphi$  wird hierbei durch die Richtung der einfallenden Welle und der Elementnormalen des jeweiligen Elements gebildet. Beide Gleichungen (4,5) haben nun den Vorteil, dass alle benötigten Größen bekannt sind und somit das Integral berechnet werden kann.

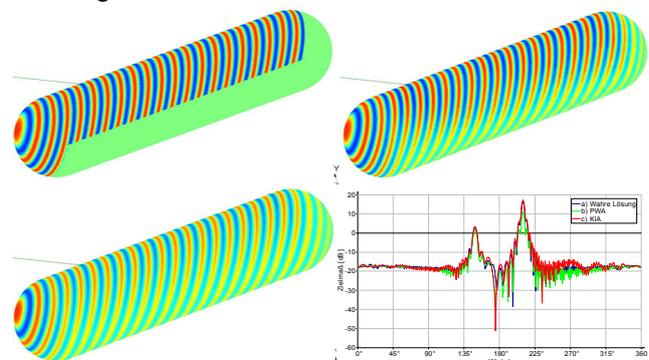


Abbildung 1: Vergleich Kirchhoff / PWA

Als Beispiel wird das Zielmaß (1) eines Zylinders mit Kugelkappen, welcher aus einem Aspektwinkel von 30° beschallt wird, für 20 kHz berechnet. Abb.1 zeigt den Realteil des Schallwechseldrucks auf der Oberfläche (links

oben: Kirchhoff, rechts oben: wahre Lösung, links unten: PWA). Das resultierende Zielmaß (Abb.1 rechts unten) liegt bei allen etwa auf gleichem Niveau.

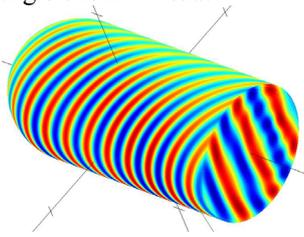


Abbildung 2: Schalldruck auf Zylinder mit verschiedenen Enden

Allerdings sind in bestimmten Fällen die Ergebnisse der beiden Hochfrequenz-Verfahren nicht gut übereinstimmend.

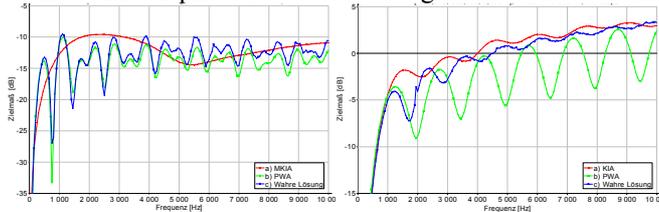


Abbildung 3: Schalldruck auf Zylinder mit verschiedenen Enden

Als Beispiel dient ein an den Enden modifizierter Zylinder (Abb. 2), welcher aus zwei verschiedenen Aspektwinkeln beschallt wird. Abbildung 3 (links) wird aus 90° beschallt, während das Zielmaß in einem Winkel von 180° für Frequenzen von 0-10 kHz ermittelt wurde. Abb. 3 (rechts) zeigt das Zielmaß das durch Beschallung aus 30° im Winkel von 150° ermittelt wurde. Im linken Fall stimmt die PWA (grün) mit der wahren Lösung (blau) gut überein, während im rechten Fall Kirchhoff (rot) mit der wahren Lösung (blau) übereinstimmt. Die Ursache hierfür liegt in den Vorfaktoren der Formeln (4,5). Für die PWA ist dieser Vorfaktor  $(1 - \cos(\varphi))$  abhängig von der Elementnormalen und nimmt Werte zwischen 0 und 2 an. Für die Kirchhoff-Näherung ist dieser Wert 2 auf der beschallten Seite und verschwindet auf der Schattenseite.

4 BEM mit PWA-Ansatz

Es gilt nun also diesen Vorfaktor präziser zu bestimmen. Für den Druck wird hierfür folgender Ansatz gewählt

$$p(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot p^i(\vec{r}). \tag{6}$$

Die für die klassische BEM relevante Formel kann mittels des Kirchhoff-Integrals (2) gewonnen werden. Sie lautet in diskretisierter Form (Dreiecke) für den schallharten Fall:

$$\frac{1}{2} p(\vec{r}_e) = - \sum_{Elem \Delta} \iint p(\vec{r}) \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}_e)}{\partial n} d\Gamma + p^i(\vec{r}_e) \tag{7}$$

Hierbei ist  $\vec{r}$  die Integrationsvariable, während es sich bei  $\vec{r}_e$  um den Ladepunkt handelt. Damit die Integrale über die Dreiecke in (7) gelöst werden können, müssen die Dreiecke so klein gemacht werden, dass bei konstanten Ansatzfunktionen der Druck  $p(\vec{r})$  vor das Integral gesetzt werden kann. Falls nun aber der Ansatz (6) in (7) eingesetzt wird, ergibt sich:

$$\frac{A(\vec{r}_e)}{2} = - \sum_{Elem \Delta} \iint A(\vec{r}) \cdot \frac{p^i(\vec{r})}{p^i(\vec{r}_e)} \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}_e)}{\partial n} d\Gamma + 1 \tag{8}$$

Da der Vorfaktor  $A(\vec{r})$  für deutlich größere Bereiche als konstant angenommen werden kann, kann dieser ebenfalls vor das Integral gezogen werden. Das resultierende Gleichungssystem bestimmt nun nicht mehr wie in der klassischen BEM den unbekanntem Druck  $p$ , sondern den unbekanntem Faktor  $A$ . Dieses Gleichungssystem besitzt nun deutlich weniger Unbekannte als bei klassischen konstanten oder auch linearen Ansatzfunktionen.

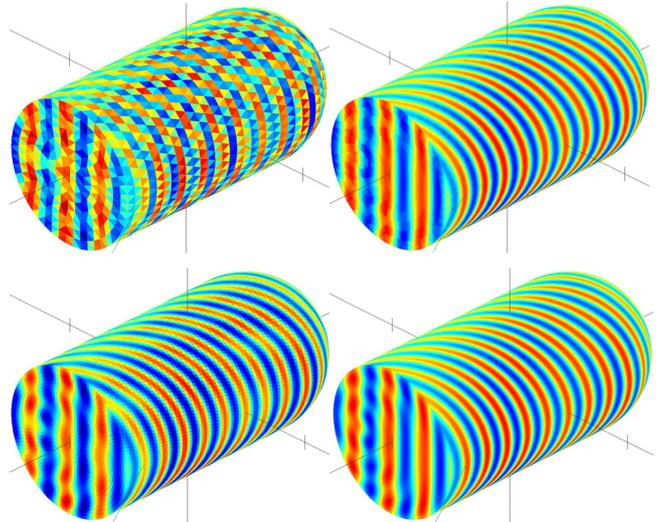


Abbildung 4: Schalldruck auf modifiziertem Zylinder

Als Beispiel wird der Druck auf der Oberfläche eines modifizierten Zylinders berechnet. Die zwei linken Abbildungen (Abb. 4 links) verwenden konstante Ansatzfunktionen, die rechten die PWA-Ansatzfunktion. Die oberen Abbildungen sind mit 2500 Elementen während die unteren mit 32000 Elementen erzeugt wurden. Die Zylinder wird aus 30° mit einer ebenen Welle (10 kHz) beschallt. Obwohl nur 2500 Elemente (Abb. 4 oben rechts) verwendet werden, ist das Ergebnis nahezu so gut wie das mit 32000 Elementen (Abb. 4 unten rechts). Für Zielmaßberechnungen ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt. Die klassischen konstanten oder linearen Ansatzfunktionen verlangen in etwa 6 Elemente pro Wellenlänge. Im Gegensatz dazu kommen die PWA Ansatzfunktionen mit nur einem in dieser Arbeit neu entwickeltem Element pro Wellenlänge (für konvexe Oberflächenanteile) aus.

Literatur

[1] Brekhovskikh, L.M.: Waves in Layered Media, Academic Press, N.Y. 1960  
 [2] Urick, R.J.: Principles of underwater sound, McGraw-Hill Inc. 1967  
 [3] Nolte, B. et al.: numerical methods for wave scattering phenomena by means of different boundary formulations, JCA Vol 15 No4 (495-529), 2007