

Ein iteratives Optimierungsverfahren für akustische Anwendungen basierend auf der Methode der Topologiederivate und der Randelemente

S. C. Beck¹, A. Sisamon², S. Langer¹, A. P. Cisilino²

¹ Institut für Technische Mechanik, TU Braunschweig, Deutschland, Email: infaminfo@tu-braunschweig.de

² INTEMA, Universidad Nacional de Mar del Plata – CONICET, Mar del Plata, Argentina, Email: cisilino@fi.mdp.edu.ar

Einleitung

Schallschutzbauwerke dienen zum Schutz vor Lärm. Die jeweilige Geometrie z. B. einer Lärmschutzwand hat maßgeblichen Einfluss auf ihre Abschirmwirkung. Ziel ist daher, eine Form zu finden, die unter gegebenen äußeren Bedingungen (wie Gebäudeabstand, Geländegegebenheiten) eine bestmögliche Wirkung hat.

Hier wird ein Ansatz vorgestellt, der die Methode der Topologiederivate (engl. *topological derivate*) mit der der Randelemente (BEM) in einem iterativen Verfahren verknüpft. Dazu wird der zu untersuchende Bereich durch ein regelmäßiges Punkteraster diskretisiert und eine Zielfunktion vorgegeben. Ein aus Randelementen diskretisiertes Objekt befindet sich als Startkonfiguration im Untersuchungsraum. Das Topologiederivat bestimmt in jedem Iterationsschritt diejenigen Punkte, um die das Objekt erweitert werden muss, um zur Zielfunktion zu konvergieren, bis ein Abbruchkriterium erreicht ist.

Methode der Topologiederivate

Bezogen auf das Beispiel der Planung einer Schallschutzwand ermittelt die Methode der Topologiederivate diejenigen Stellen im zur Verfügung stehenden Planungsgebiet, an denen die Schallschutzwand positioniert werden sollte, um möglichst effektiv für geringe Schallpegel am Ort der Wohnbebauung zu sorgen. Mathematisch lässt sich dies als ein Optimierungsproblem ausdrücken: für jeden Punkt im Planungsbereich wird überprüft, inwieweit sich das Einfügen der Lärmschutzwand positiv am Immissionsort auswirkt. Diese Einflussrate wird als Topologiederivat bezeichnet.

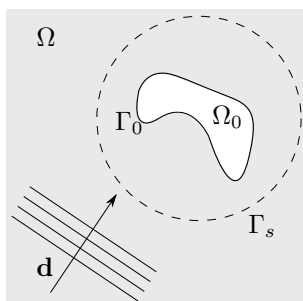


Abbildung 1: Problembeschreibung nach Feijóo [1]

Die hier verwendete Formulierung des Topologiederivats geht auf Feijóo [1] zurück. Er geht in seiner Arbeit von einem homogenen Untersuchungsgebiet Ω aus, in dem sich ein Objekt Ω_0 mit schallhartem Rand Γ_0 befindet (Abb.

1) und in dem sich Wellen mit bekannten Eigenschaften ausbreiten. Desweiteren existiert ein virtueller Rand Γ_s als Kontrollbereich.

Sind nun auf dem virtuellen Rand Γ_s Druckwerte p_m bekannt (aus Messung oder als Vorgabe), so ist die Form des Objekts Ω_0 so zu bestimmen, dass sich eben diese Werte p_m auf dem virtuellen Rand ergeben, wenn das Objekt dem bekannten Schalleinfall unterliegt. Diese Aufgabenstellung wird als *inverses Problem* bezeichnet.

Der iterative Prozess zur Lösung des inversen Problems beginnt mit einer Startkonfiguration: Im Untersuchungsgebiet befindet sich ein Objekt Ω_0 , dessen Geometrie definiert ist. Bei bekanntem Schalleinfall lässt sich das durch die Startgeometrie hervorgerufene Schalldruckfeld p ermitteln. Die Lösung dieses sogenannten *Vorwärtsproblems* ergibt sich aus der Lösung der Helmholtz-Gleichung bei schallharten Randbedingungen des Objekts und unter Berücksichtigung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung.

Die aus dem Vorwärtsproblem ermittelten Werte p lassen sich nun auf dem Kontrollrand Γ_s mit den vorgegebenen Werten p_m vergleichen und ergeben eine Differenz $p - p_m$. Ziel ist es, diese Differenz in Abhängigkeit von der Form des Objekts Ω_0 zu minimieren. Diese Optimierungsaufgabe lässt sich ausdrücken als

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} |p - p_m|^2 d\Gamma \quad (1)$$

mit dem Gebiet Ω als Zielfunktion.

Das Topologiederivat bestimmt nun für jeden Punkt \mathbf{y} im Untersuchungsgebiet, wie sinnvoll es ist, dort ein Objekt anzuordnen, damit die Differenz $p - p_m$ möglichst klein wird.

Dazu wird zunächst bestimmt, welche Schalldruckwerte λ auf dem Rand Γ_0 der Startkonfiguration vorherrschen müssen, um die Differenzen $p - p_m$ auf dem Kontrollrand (ohne weiteren Schalleinfall) zu erreichen. Die Lösung λ dieses *adjungierten Problems* und die Lösung p des Vorwärtsproblems werden dann in der Formulierung des Topologiederivats kombiniert:

$$D_T(\mathbf{y}) = \Re [2\nabla\bar{\lambda}(\mathbf{y}) \cdot \nabla p(\mathbf{y}) - \kappa^2 \bar{\lambda}(\mathbf{y}) p(\mathbf{y})], \quad (2)$$

wobei der Überstrich konjugiert komplexe Werte bezeichnet und κ die Wellenzahl. Eine ausführlichere Herleitung der Autoren findet sich in [3].

Die Auswertung des Topologiederivats zeigt, an welchen Stellen das Objekt erweitert werden muss. Diese neue

Geometrie stellt den Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt dar.

Berechnungsverfahren

Im Rahmen dieser Arbeit werden das Vorwärts- und das adjungierte Problem mittels der BEM gelöst. Die Lösung des Vorwärtsproblems ergibt sich für beliebige Feldpunkte \mathbf{y} im Gebiet Ω zu

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} -p(\mathbf{x})q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma + Ae^{i\kappa\mathbf{y}\mathbf{d}}, \quad (3)$$

wobei $p(\mathbf{x})$ die Druckwerte auf dem Rand Γ_0 des Objekts bezeichnet und $q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Ableitung der Fundamentallösung $p^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($q^* = \partial p^*/\partial n$). Der zweite Term auf der rechten Seite bezeichnet die unter dem Richtungsvektor \mathbf{d} einlaufende Welle mit der Amplitude A und der Wellenzahl κ . i ist die imaginäre Einheit.

Nach Berechnung aller Feldpunkte im betrachteten Gebiet lassen sich die zugehörigen räumlichen Ableitungen bestimmen.

$$\frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial x_i} = \int_{\Gamma} -p(\mathbf{x}) \frac{\partial q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} d\Gamma + \frac{Ae^{i\kappa\mathbf{y}\mathbf{d}}}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Die Lösung des adjungierten Problems ergibt sich aus

$$(p - p_m)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} -\lambda(\mathbf{x})q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma \quad \text{für } \mathbf{y} \in \Omega \quad (5)$$

mit den zunächst unbekanntenen Druckwerten $\lambda(\mathbf{x})$ auf dem Rand des Objekts. Diese lassen sich durch Aufstellen eines Gleichungssystems ermitteln, das mittels Singulärwertzerlegung (SVD) gelöst wird. Die räumlichen Ableitungen $\partial\lambda(\mathbf{y})/\partial x_i$ ergeben sich analog zum Vorwärtsproblem.

Iterationsalgorithmus

Der Iterationsalgorithmus wurde bereits bei der Topologieoptimierung elastischer Strukturen angewandt [2] und wiederholt bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums

- die Lösung des Vorwärtsproblems $p(\mathbf{y})$ und Abgleich mit dem Abbruchkriterium,
- die Bestimmung der Gradienten $\nabla p(\mathbf{y})$,
- die Lösung des adjungierten Problems $\lambda(\mathbf{y})$ und der Gradienten $\nabla\lambda(\mathbf{y})$,
- die Berechnung der Topologiederivate $D_T(\mathbf{y})$,
- die Eliminierung derjenigen Punkte mit dem maximalen Topologiederivat und anschließende Neuvernetzung des Modells (siehe Abb. 2).

Beispiel

Dieses Beispiel dient zur Verifikation der vorgestellten Methode. Der geometrische Aufbau ist in Abb. 3(a) wiedergegeben. Im Untersuchungsgebiet sind auf einem virtuellen Rand Γ_s (blau) an 800 Punkten Druckwerte p_m vorgegeben. Im vorliegenden Fall sind die Druckwerte p_m berechnet worden, indem ein kreisrundes Objekt ($R = 2$ m) im Untersuchungsgebiet angenommen

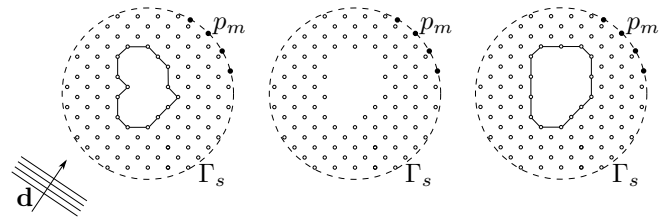


Abbildung 2: Neuvernetzung des BEM-Modells: Ausgangsmodell (links), Eliminierung von Feldpunkten (Mitte), neues Modell (rechts)

wurde, das der Schalleinwirkung von 100 ebenen Wellen (gleichmäßig verteilt über 2π) unterliegt. Die Amplitude der ebenen Wellen beträgt jeweils 1 Pa, die Wellenzahl κ 32 m^{-1} . Der Untersuchungsbereich umfasst eine Fläche von $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ mit 13639 Feldpunkten (Gitterabstand $0,05 \text{ m}$), in dem sich zu Beginn des Iterationsprozesses ein quadratisches Objekt (Seitenlänge $L = 2 \text{ m}$, schwarz) befindet. Das Objekt ist durch 160 Randelemente diskretisiert.

In jedem Iterationsschritt werden 2,5% der Feldpunkte eliminiert. Nach 14 Iterationsschritten ist das Abbruchkriterium erreicht. Abb. 3(b) zeigt die mittels der vorgestellten Methode erzielte Geometrie (schwarz) und sowie als Vergleich die Kreisgeometrie (rot), aus der die Werte p_m generiert worden sind.

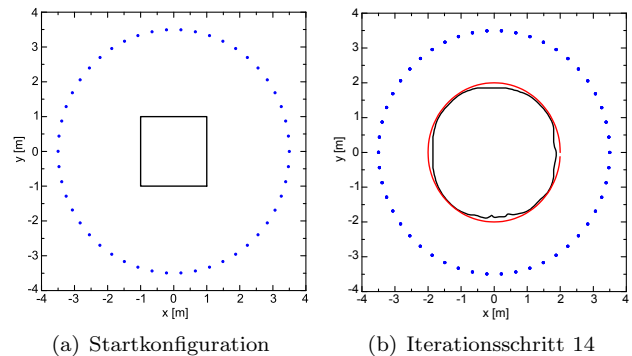


Abbildung 3: Verifikationsbeispiel

Danksagung: Diese Arbeit wurde im Rahmen des Projekts DA 0806 von DAAD (Deutschland) und MINCYT (Argentinien) unterstützt.

Literatur

- [1] Feijóo, G. R.: A new method in inverse scattering based on the topological derivative. *Inverse Problems* (2004), 1819–1840
- [2] Carretero Neches, L.; Cisilino A. P.: Topology Optimization of 2D Elastic Structures Using Boundary Elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements* (2008), 533–544
- [3] Sisamon, A.; Beck, S. C.; Cisilino A. P.; Langer, S.: Iterative Optimization Methodology for Sound Scattering using the Topological Derivative Approach and the Boundary Element Method. *Proceedings of BETEQ XI* (2010), 104–109