

Beschleunigung von Multifrequenz-FE-Analysen durch die Verwendung von Gleichungslösern mit ‚Subspace Recycling‘

Jan Biermann, Otto von Estorff

Institut für Modellierung und Berechnung, Denickestr.17. 21073 Hamburg,
E-Mail: biermann@tuhh.de

Einleitung

Die Diskretisierung der Helmholtzgleichung mittels Finiten und Infiniten Elemente führt auf ein Gleichungssystem der Form

$$\left[K + i\omega L - \omega^2 M \right] x = -i\rho\omega f \quad (1)$$

mit den Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen M, L und K , dem Anregungsvektor f sowie der Dichte ρ . Häufig gilt es, das Gleichungssystem für viele Frequenzen ω_i zu lösen, wobei diese erheblich auseinander liegen können. Behandelt man Außenraumprobleme, so ist die klassische Vorgehensweise der modalen Reduktion zur effizienten Lösung nicht möglich [1]. Weitere Modellordnungsreduktionsverfahren, wie die Padé via Lanczos Approximation [2] oder die Second Order Arnoldi Reduction [3], genügen zum einen oft der geforderten Genauigkeit nicht, zum anderen sind sie bei vielen Anwendungen unwirtschaftlich, da sie die Übertragungsfunktion lokal approximieren was bei fortschreitender Frequenz wiederholt werden muss und jeweils eine teure Matrixfaktorisierung erfordert. Somit bleibt zur Problemlösung nur das Lösen einer Sequenz von linearen Gleichungssystemen

$$A_i(\omega_i)x_i(\omega_i) = b_i(\omega_i), i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

die, wenn das Anwendungsgebiet nicht eingeschränkt werden soll, komplex, unsymmetrisch und indefinit sind. Es werden im Folgenden zwei Verfahren vorgestellt, die unter diesen Bedingungen den Gesamtrechnaufwand erheblich reduzieren.

Subspace Recycling

Im Rahmen eines *Subspace Recycling* muss zunächst zwischen dem „*intercyclic recycling*“ und dem „*intersystem recycling*“ unterschieden werden. Erstgenanntes bezieht sich auf das Wiederverwenden gewisser Unterräume bei einem so genannten Restart, um die Konvergenz bei der Lösung eines einzigen Gleichungssystems zu beschleunigen. Das „*intersystem recycling*“ beschreibt hingegen den Informationstransfer zwischen zwei aufeinander folgenden Gleichungssystemen. Genau um dies zu erreichen kann der sehr flexible Rahmen der *GCR*-Methode [4] genutzt werden, da hierbei keinerlei Anforderungen an die Basis des Approximationsraumes U gestellt werden. Es muss lediglich gelten $C=AU$, mit der Orthonormalbasis C des Raumes, der die Richtung dieser schiefen Projektion beschreibt. Dadurch kann formell ein beliebiger Unterraum $U_k^{(i)} \subset U^{(i)}$ des Systems $A_i x_i = b_i$ auf das System $A_{(i+1)} x_{(i+1)} = b_{(i+1)}$ übertragen werden:

$$C^{(i)} = A^{(i)}U^{(i)} \rightarrow U_k^{(i+1)} \subset U^{(i)} \rightarrow C_k^{(i+1)} = A^{(i+1)}U_k^{(i+1)}.$$

Dies führt zu einem verbesserten Konvergenzverhalten, wenn die Auswirkung der Differenz der aufeinander folgenden Operatoren $\Delta A = A_{(i+1)} - A_i$ auf die Lösung stark lokalisiert ist oder wenn formell die Projektion von ΔA auf den *Recycle Space* klein ist. Zur Beantwortung der Frage nach der eigentlichen Generierung des *Recycle Spaces* muss zunächst das Konzept des „*Nested Solvers*“ eingeführt werden. In der ursprünglichen Form des *GCR* Algorithmus wird bei jeder Iteration der Approximationsraum um das aktuelle Residuum erweitert. Ein „*Nested Solver*“, in diesem Fall *GMRES*, versucht eine verbesserte Suchrichtung zu generieren, indem der Fehlervektor e , welcher der Residuengleichung $Ae=r$ gehorcht, approximiert wird. Um hierbei die Orthogonalität zum äußeren *GCR*-Zyklus zu gewährleisten, wird hierbei statt des Operators A selbst, dessen orthogonale Projektion $(I - C_k C_k^H)A$ verwendet, was unter *GCRO* verstanden wird [5]. Dies führt dann zu der erweiterten Arnoldi-Beziehung

$$\begin{aligned} (I - C_k C_k^H) A V_{m-k} &= V_{m-k+1} \underline{H}_{m-k} \\ A V_{m-k} &= C_k B_{m-k} + V_{m-k+1} \underline{H}_{m-k} \\ \text{mit } B_{m-k} &= C_k^H A V_{m-k} \end{aligned} \quad (3)$$

$$A \begin{bmatrix} U_k & V_{m-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & V_{m-k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & B_{m-k} \\ 0 & \underline{H}_{m-k} \end{bmatrix}$$

$$A W_m = \tilde{W}_{m+1} \tilde{H}_m.$$

Die globale Lösung $x_m = x_0 + z_m = x_0 + W_m y$ im i -ten *GCR*-Zyklus wird dann durch das Lösen des Minimierungsproblems

$$\min_{y \in \mathbb{C}^m} \|r_i - A W_m y\|_2 \quad (4)$$

bestimmt. Aus dem generierten Raum $\text{Range}(W_m)$ wird pro Zyklus der Raum C_k ausgewählt, welcher für den nächsten Zyklus wiederverwendet wird („*intercyclic recycling*“). Der Ablauf ist schematisch in Abbildung 1 dargestellt. Die Art und Weise der Selektion von C_k ist der Unterschied zwischen den Varianten *GCRO-DR* und *GCROT* [6]. *GCRO-DR* nutzt die Arnoldi-Beziehung aus Gleichung (3), um aus der Approximation von A im Unterraum $\text{Range}(W_m)$ approximierten Eigenvektoren zu den betragsmäßig kleinsten Eigenwerten zu berechnen. Werden diese im nächsten Zyklus in den Approximationsraum über C_k integriert, werden die entsprechenden Eigenwerte aus dem Operator deflationiert und somit die Konvergenz beschleunigt. *GCROT* hingegen versucht die Vektoren aus W_k zu selektieren, die bei einem Restart von *GMRES* maximal mögliche Orthogonalität gewährleisten. Der Verlust der

Orthogonalität zwischen den Arnoldivektoren vor und nach dem Restart ist in der Tat die Ursache der Konvergenzprobleme von „Restarted GMRES“. Für eine Beschreibung und Herleitung der entsprechenden algebraischen Beziehungen sei auf [7] verwiesen.

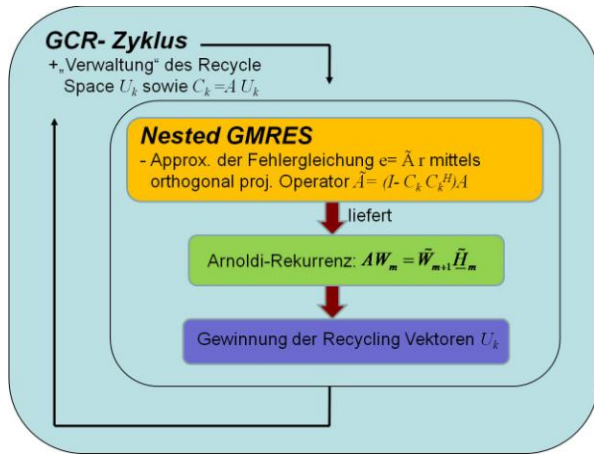


Abbildung 1: Prinzipieller Aufbau eines auf GCR basierenden iterativen Gleichungslösers mit Subspace Recycling

Numerisches Beispiel

Zur Veranschaulichung des Potentials dieser Methoden, wurde eine dreidimensionale L-förmige akustische Kavität verwendet, die am oberen Ende geöffnet ist und am Fuß uniform angeregt wird (siehe Abbildung 2, wobei der Kubus, der durch die Infiniten Elemente repräsentierte, halbumendliche Luftraum ist). Die Anregung erfolgte für 100 Frequenzen zwischen 500Hz und 1500Hz und das FE/IFE Modell führt zu 15,911 Freiheitsgraden.

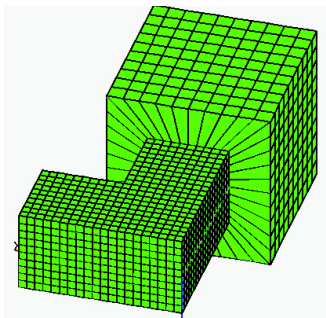


Abbildung 2: FE/IFE Modell einer geöffneten L-förmigen akustischen Kavität

Abbildung 3 stellt die benötigten Iterationen dar, um das relative Residuum auf 10^{-8} zu reduzieren. Für das Recycling basierte Lösen wurde ein Hybrider Ansatz verwendet, bei dem zunächst GCROT ausgeführt wird bis 80 Recycling Vektoren generiert sind. Dann wird zu GCRO-DR gewechselt wobei zusätzlich 70 Recycling Vektoren gebildet und aktualisiert werden. Hierbei werden jeweils 100 GMRES Zyklen pro GCR Zyklus ausgeführt. Es zeigt sich, dass GMRES(30) als Standardlöser bei einer maximal zugelassenen Anzahl an Iterationen bei 690Hz, 970Hz und ab 1360Hz nicht konvergiert. Der Recycling Ansatz ist jedoch mit GMRES(100) zu vergleichen, da dieselbe Anzahl an GMRES Zyklen durchgeführt wird, und mit

GMRES(250), da der Approximationsraum die gleiche Dimension hat. Der qualitative Vergleich spiegelt wider, dass die Lösung mit Recycling immer noch eine Form des GMRES mit Restart ist und in der Umgebung von so genannten „trapped modes“ [1] schlechter konvergiert. Quantitativ zeigt sich aber genau hier der Vorteil, da dieses Verhalten stark gedämpft ist. So benötigt der GCROT/GCRO-DR Löser beispielsweise bei 970Hz nur 1,3% der Iterationen gegenüber GMRES(100) und selbst gegenüber Non-Restarted GMRES nur 18,5%. Für den gesamten betrachteten Frequenzbereich spart der Einsatz der vorgeschlagenen Recycling Strategie 74,1% der Iterationen gegenüber GMRES(250), was hier GMRES (full) entspricht, und 97,45% gegenüber GMRES(100). Hierbei zeigt sich, dass die vorgestellten Methoden für akustische Fragestellungen effizient eingesetzt werden können und es wird deren enormes Potential deutlich.

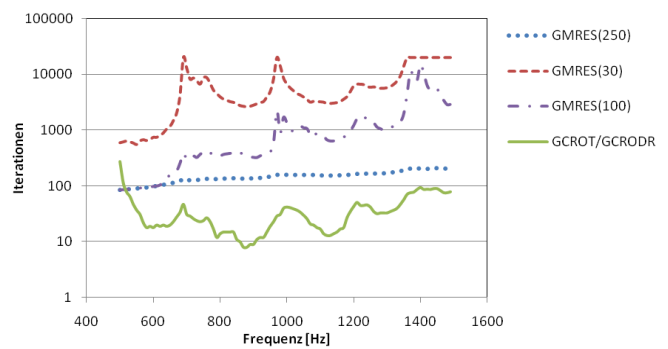


Abbildung 3: Iterationen für Frequenzsweep von 500Hz - 1500Hz

Literatur

- [1] Marburg, S.: Normal modes in external acoustics. Part III: Sound power evaluation based on frequency-independent supersposition of modes Acta Acustica united with Acustica 92 (2006), 296-311
- [2] Wagner, M., Pinsky, P., Malhotra, M.. Application of Padé via Lanczos approximations for efficient multifrequency solution of Helmholtz problems. JASA (2003), 313-319
- [3] H. Voss J. Lampe, Second Order Arnoldi Reduction application to some engineering problems, Hamburg University of Technology, Technical Report 93, 2006
- [4] S. C. Eisenstat, et.al., Variational iterative methods for non-symmetric systems of linear equations. SIAM J. Numer. Anal., 20 (1983), 345-357
- [5] E. de Sturler, Nested Krylov Methods based on GCR, Journal of Computational and Applied Mathematics, 67 (1996), pp. 15-41.
- [6] Mike Parks, Eric de Sturler, Greg Mackey, Duane D. Johnson, and Spandan Maiti, Recycling Krylov Subspaces for Sequences of Linear Systems, SIAM Journal on Scientific Computing, 28 (2006), pp. 1651-1674
- [7] E. de Sturler, Truncation Strategies for Optimal Krylov Subspace Methods, SIAM Journal on Numerical Analysis 36 (1999), pp. 864-889