

Vorkonditionierung von Fast-Multipol-Verfahren zur Lösung akustischer Streu- und Innenraumprobleme

¹Christian Steuck, ²Ralf Burgschweiger, Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik, 13353 Berlin, Deutschland.

Email: ¹steuck@beuth-hochschule.de, ²burgi@beuth-hochschule.de

Einleitung

Eine Multi Level Fast Multipol Methode zur Lösung der Randintegralformulierung der Helmholtzgleichung bei 3D - Streuproblemen wird betrachtet, wobei der Einsatz von Vorkonditionierern in Verbindung mit dem iterativen Löser GMRES untersucht wird. Eine Vorkonditionierung mit einer Nahfeldmatrix, die sich aus einer variablen Nahfeldgröße ergibt, wird bezüglich der Anzahl der Iterationen und der Lösezeit untersucht. Die Invertierung der so erhaltenen Konditionsmatrix kann mit einer inkompletten LU-Zerlegung vereinfacht werden.

Alternativ kann die Konditionsmatrix nur näherungsweise invertiert werden, hierfür wird eine approximative Inverse der Konditionsmatrix berechnet, sodass das Produkt aus beiden im Sinne einer Matrixnorm annähernd die Einheitsmatrix ergibt. Die Güte der Approximation lässt sich variieren; die optimale Wahl stellt einen Kompromiss zwischen Stärke des Effekts und Rechenaufwand dar.

Grundlagen

Die Boundary Element Methode (BEM) löst die Kirchhoffsche Randintegralgleichung

$$\frac{1}{2}p(y_j) = \int_O \left(p(x_i) \frac{\partial G(x_i, y_j)}{\partial n} - G(x_i, y_j) \frac{\partial p(x_i)}{\partial n} \right) do, \quad (1)$$

$$\text{mit } G(x_i, y_j) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|x_i - y_j|}}{|x_i - y_j|} \quad (2)$$

für den Schalldruck p an den Orten x_i, y_j auf der Oberfläche O eines Streukörpers oder Innenraums durch Diskretisierung von O in N Elemente mit den Mittelpunkten x_i bzw. y_j . Es entsteht ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot p = b \quad (3)$$

mit einer vollbesetzten, nichtsymmetrischen, komplexen $(N \times N)$ - Systemmatrix A . Zur Lösung dienen iterative Verfahren wie die *Generalized Minimum Residual Method* (GMRES). Das GMRES-Verfahren benötigt viele Matrix-Vektor-Produkte, deren Berechnung mittels der Fast Multipol Methode (FMM) [1] beschleunigt werden kann. Diese basiert auf der Einführung von Entwicklungspunkten z_x und z_y und der Zerlegung der Strecke $x_i - y_j$ in die Teilstrecken $c_x = x_i - z_x$, $a = z_x - z_y$ und $c_y = z_y - y_j$ sowie der Darstellung der Greenschen Funktion G als Integral über die Einheitskugeloberfläche

S über ein Produkt, dessen Faktoren nur von den Teilstrecken abhängen:

$$G(x_i, y_j) = \int_{S^2} f_1(c_y, s) \cdot T(a, s) \cdot f_2(c_x, s) ds. \quad (4)$$

Die Transferfunktionen $T(a, s)$ müssen nur einmal berechnet werden und lassen sich für viele Punktpaare x_i, y_j wiederverwenden. Dabei konvergiert die Reihendarstellung der $T(a, s)$ nur sicher unter der Bedingung $a > \max(c_x) + \max(c_y)$. Die Systemmatrix wird daher in eine dünnbesetzte Nahfeldmatrix A_{nah} und eine Fernfeldmatrix A_{fern} aufgeteilt:

$$A = A_{nah} + A_{fern}. \quad (5)$$

Die Multiplikation von A_{nah} mit p geschieht auf konventionelle Weise, die Multiplikation von A_{fern} mit p kann mit der FMM beschleunigt werden.

Methoden zur Vorkonditionierung

Zentrale Idee ist, die Kondition von (3) durch Multiplikation von links mit A_n^{-1} zu verbessern; dabei muss A_n nicht mit A_{nah} identisch sein, sondern stellt vielmehr eine Matrix dar, die nur diejenigen Einträge von A enthält, die die Wechselwirkung zwischen Elementmittelpunkten beschreibt, die voneinander einen Abstand unterhalb einer gewissen vorgegebenen **Nahfeldabstand** haben. Die Invertierung von A_n kann beschleunigt werden, indem A_n vorher zerlegt wird in eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere U , sodass $LU \approx A_n$ (*incomplete LU factorization* ILU). Alle Einträge in A_n , die betragskleiner als die *drop tolerance* sind, werden behandelt als wären sie Null. Für größere Werte der *drop tolerance* ist die Näherung von LU an A_n daher umso schlechter, wird aber desto schneller berechnet.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, das Gleichungssystem (3) mit einer approximativen Inversen $\overline{A_n^{-1}}$ zu konditionieren, für die gilt $\overline{A_n^{-1}}A \approx I$. Die Näherungsinverse $\overline{A_n^{-1}}$ ist dünn besetzt (*sparse approximative inverse*, SPAI [2]) und schnell zu berechnen. Der Algorithmus bestimmt für jede der N Spalten von $\overline{A_n^{-1}}$ eine verglichen mit N kleine Anzahl M von Werten; alle anderen sind Null. Bei der Umsetzung entsteht nebenher auch eine vereinfachtes Verfahren zur Bildung einer SPAI, bei dem N kleine Gleichungssysteme $A_{Mk} \cdot (x_1, \dots, x_M)^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ gelöst werden, wobei A_{Mk} eine $(M \times M)$ -Untermatrix von A_n um das k -te Hauptdiagonalelement herum ist.

Im Zweidimensionalen wurden Innenraumprobleme in rechteckigen Räumen ($2\text{m} \times 2\text{m}$) untersucht, am Ort $(0,3; 0,2)$ wurde eine Monopolquelle angenommen.

Im Dreidimensionalen wurden Innenraumprobleme in einem Quaderraum ($4\text{m} \times 3\text{m} \times 2\text{m}$) untersucht, mit den anderen beiden Modellen werden Außenraumstreu-probleme behandelt (siehe Abbildung 1). Alle 3D-Körper

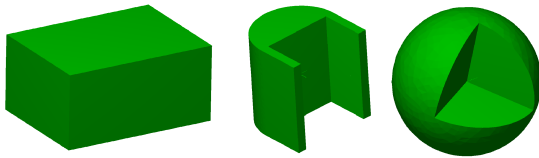


Abbildung 1: 3D-Modelle. links: Quader $4\text{m} \times 3\text{m} \times 2\text{m}$, 10 400 Elemente mit maximaler Länge $l_{max} = 0,1\text{m}$; Mitte: „Huf“-Struktur $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$, 7900 Elemente mit $l_{max} = 0,06\text{m}$; rechts: „Katzenaugen“ $d = 1\text{m}$, 2300 Elemente mit $l_{max} = 0,116\text{m}$.

sind schallhart; als Schallquelle wurde ein Monopol der Frequenz 500 Hz angenommen.

Variiert wurden die Nahfeldldistanz und damit die Besetzung von A_n , die *drop tolerance* der ILU und die Größe der Untermatrizen bei der Berechnung der SPAI.

Ergebnisse

Zur Verifikation der Ergebnisse wurden diese zusätzlich mit einer direkten Lösung (Gauß-Verfahren) verglichen. Bei den gezeigten Beispielen blieben die Unterschiede zwischen exakter und iterativer Lösung deutlich unter 1dB.

Eine Erhöhung der Nahfeldldistanz hat ein quadratisches Anwachsen der Zahl der Nichtnull-Elemente von A_n zur Folge. Entsprechend wächst der zeitliche Aufwand für die inkomplette LU-Zerlegung (Abbildung 2). Gleichzeitig verbessert sich die Kondition von (3), und es sinkt die Zeit für die eigentliche Lösung sowie die Anzahl der vom GMRES-Verfahren benötigten Iterationen.

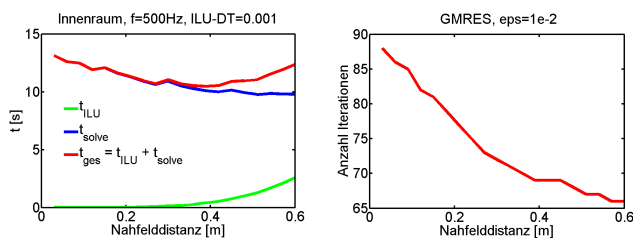


Abbildung 2: Mit der Nahfeldldistanz wächst der Aufwand t_{ILU} für die Vorkonditionierung (ILU) quadratisch, der Aufwand t_{solve} für die Lösung läuft gegen einen Grenzwert. In Summe ergibt sich ein Minimum. Es lassen sich etwa 25% der Zeit und der GMRES-Iterationen einsparen.

Ein praktisch relevanter Einfluss der *drop tolerance* der ILU konnte nicht nachgewiesen werden (Abbildung 3). Dieser Parameter ist lediglich größer als Null zu wählen, da sonst eine exakte Zerlegung durchgeführt wird, die bedeutend länger dauert als die unvollständige.

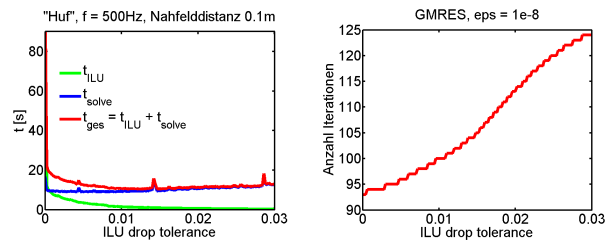


Abbildung 3: Die Variation der *drop tolerance* ergibt kein ausgeprägtes Minimum. Eine Toleranz von genau Null bedeutet exakte, komplette LU-zerlegung und ist mit hohem Aufwand t_{ILU} verbunden (links). Eine starke Vergrößerung der Zerlegung (große *drop tolerance*) verschlechtert die Kondition nur wenig (rechts).

Die Erhöhung der Spaltenzahl M erhöht die Güte der approximativen Inversen, wodurch sich ebenfalls etwa 30% der Iterationen einsparen lassen. Eine weitere Steigerung entspricht einer Invertierung der Vorkonditionierungsmatrix, für diesen Fall sinkt die Anzahl der Iterationen nicht wesentlich weiter. Für den zeitlichen Aufwand ergeben sich Minima sinngemäß wie bei der Nahfeldldistanz. Für die 2D-„Räume“ hat A_n Bandstruktur, und es lässt sich zuverlässig die schnelle vereinfachte Version der SPAI-Bildung einsetzen; im 3D-Fall gelingt dies nur ausnahmsweise.

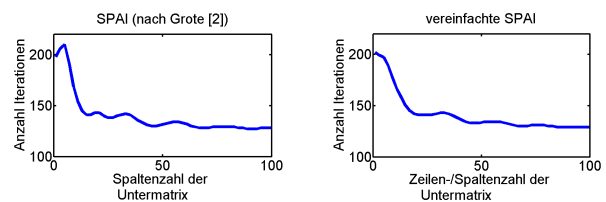


Abbildung 4: Höhere Untermatrixgrößen bei der Bestimmung der SPAI verbessern die Güte der Invertierung und die Kondition des Gleichungssystems. Es resultiert eine Einsparung von typischerweise 30% der Iterationsschritte. Für 2D-Modelle lässt sich auch die vereinfachte Version der SPAI-Bildung gewinnbringend einsetzen. Dargestellt sind Ergebnisse für den 2D-Raum mit 4488 Elementen.

Danksagung

Diese Arbeit wurde gefördert aus Mitteln des Instituts für angewandte Forschung Berlin e.V., IfaF.



Literatur

[1] Burgschweiger, R.; Schäfer, I.; Ochmann, M.: Ein Multilevel-Fast-Multipole-Algorithmus (ML-FMM) zur Berechnung der Schallstreuung am Beispiel von Objekten unter Wasser. In: *DAGA 36. Jahrestagung für Akustik Berlin*, März 2010

[2] Grote, M.; Huckle, T.: Parallel Preconditioning with Sparse Approximate Inverses, In: *SIAM J. Sci. Comput.*, 1996(18), S. 838-853