

# Akustische Greensche Funktionen im Zeitbereich über unendlichen Ebenen

Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin, E-Mail: ochmann@beuth-hochschule.de

## Einleitung

Greensche Funktionen bilden ein wesentliches Element der akustischen Boundary-Elemente-Methode (BEM) im Frequenzbereich. Sie bilden den Kern der zugrunde liegenden Integralgleichungen. Im unbeschränkten, dreidimensionalen Raum nimmt die Greensche Funktion im Frequenz- und im Zeitbereich eine sehr einfache Form an. In Halbräumen, die im Frequenzbereich durch eine unendliche Halbebene mit zugehöriger Impedanzrandbedingung beschrieben werden, lässt sich für die Greensche Funktion eine Integraldarstellung finden. In der vorliegenden Arbeit werden geschlossene Lösungen für die Greensche Funktion im Zeitbereich (d.h. für die Impulsantwort) über unendlichen Ebenen mit Massenimpedanz bzw. rein absorbierender Impedanz angegeben. Die Herleitung dieser exakten Lösungen findet der interessierte Leser in [1]. Die Kenntnis derartiger Impulsantworten ermöglicht es, effektive Formulierungen einer akustischen BEM im Zeitbereich über Böden mit allgemeinen Randbedingungen zu gewinnen. Weiterhin kann durch Faltung das Schallfeld einer Punktquelle mit einer vorgegebenen Zeitfunktion berechnet werden.

## Beschreibung der Problemstellung

Als Schallquelle wird ein Dirac-Deltaimpuls zur Zeit  $t = 0$  und am Ort  $\mathbf{y} = (x_s, y_s, z_s) = (0, 0, h)$  betrachtet

$$q(x, y, z, t) = Q\delta(x, y, z - h, t), \quad (1)$$

der sich über einer Impedanzebene (in  $z = 0$ ) befindet und die inhomogene Wellengleichung ( $Q =$  Quellstärke)

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -q(x, y, z, t) \quad (2)$$

lösen muss, siehe Abb. 1.

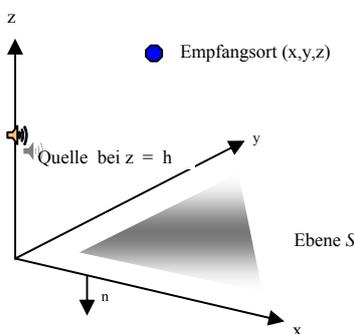


Abb. 1: Geometrie des Halbraumproblems.

Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen ist die Darstellung der Greenschen Funktion im Halbraum aus [2], Gl. (18), die sich aus der Überlagerung von zwei

Punktquellen und einem halbunendlichen Linienintegral ergibt, das selbst wiederum aus Punktstrahlern besteht:

$$G(x, y) = \frac{e^{jkr(h)}}{4\pi r(h)} + \frac{e^{jkr(-h)}}{4\pi r(-h)} + \hat{\sigma} \quad (3a)$$

mit

$$\hat{\sigma} = 2\gamma e^{-\gamma h} \int_{-\infty}^{-h} e^{-\gamma \eta} \frac{e^{jkr(\eta)}}{4\pi r(\eta)} d\eta. \quad (3b)$$

Hierbei ist  $r(h) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$ ,  $k = \omega/c$  ist die Wellenzahl und  $\gamma = jk/Z_0$  mit der normalisierten akustischen Impedanz  $Z_0 = Z/(\rho c)$ .  $\rho$  ist die Dichte des Mediums und  $c$  die Schallgeschwindigkeit.

## Impulsantwort für eine massenartige Ebene

Zuerst wird der Fall einer unendlichen, reflektierenden Ebene betrachtet, die mit der Flächenmasse  $m''$  schwingt. In [1] wird nun gezeigt, dass es möglich ist, durch inverse Fouriertransformation von Gl. (3) die folgende, einfache und geschlossene Darstellung (4) zu gewinnen:

$$g = \frac{\delta(t-r(h)/c)}{4\pi r(h)} + \frac{\delta(t-r(-h)/c)}{4\pi r(-h)} - \frac{c\zeta}{2\pi} e^{\zeta(h+z)} \frac{e^{-\zeta\sqrt{(ct)^2 - R^2}}}{\sqrt{(ct)^2 - R^2}} H\left(t - \frac{r(-h)}{c}\right)$$

Hierbei bedeuten:  $\zeta = \frac{\rho}{m''}$ ,  $R^2 = x^2 + y^2$  und  $H$  die Heavisidesche Einheitssprungfunktion. Man sieht sofort, dass man für  $\zeta = \frac{\rho}{m''} \rightarrow 0$  den schallharten Fall erhält und auch die korrekte Lösung, da der dritte Term in Gl. (4) verschwindet.

Falls die Punktquelle nun das allgemeine Zeitsignal  $q(t)$  aussendet, so erhält man die zugehörige Lösung der Wellengleichung im Halbraum über der Ebene durch Faltung von  $q(t)$  mit der Impulsantwort (4). Wählt man beispielsweise das harmonische Signal  $q(t) = e^{-j\omega t}$ , so gewinnt man für senkrechten Schalleinfall genau die Lösung (17.60) auf S. 476 von [3], wie es sein muss. Für das exponentiell abklingende Signal

$$q(t) = \begin{cases} e^{-\zeta t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = e^{-\zeta t} H(t) \quad (5)$$

erhält man sogar eine einfache analytische Lösung (s. [1]).

## Impulsantwort für eine rein absorbierende Ebene

Eine rein absorbierende Ebene, auf der eine reelle Impedanz  $Z$  vorgeschrieben ist, hat eine größere praktische Bedeutung. Die Lösung ist aber wesentlich schwieriger zu gewinnen.

Jedoch ist es auch in diesem Fall erstaunlicherweise möglich, eine geschlossene, einfache Form für die Impulsantwort im Halbraum zu finden. Die Herleitung findet man in [1]. Das Ergebnis lautet

$$g = \frac{\delta(t - r(h)/c)}{4\pi r(h)} + \frac{\delta(t - r(-h)/c)}{4\pi r(-h)} + \sigma \quad (6a)$$

mit

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{H(t - r(-h)/c)}{\sqrt{(Z_0 c t + z + h)^2 + (1 - Z_0^2) R^2}}. \quad (6b)$$

Es läßt sich leicht nachrechnen, dass man aus Gl. (6) die Lösungen für die beiden Grenzfälle der schallweichen oder der schallharten Ebene erhält. Durch Faltung von (6) mit einem beliebigen Zeitsignal  $q(t)$  erhält man wiederum allgemeinere Lösungen. Insbesondere erhält man einfache Lösungen für den Fall, dass die Normalimpedanz der Ebene mit der Impedanz der freien ebenen Welle übereinstimmt:  $Z = \rho c$ . Wählt man außerdem das zeitharmonische Signal

$$q(t) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}, \text{ so gewinnt man für } \frac{\omega}{c} (z_h + r_h) \gg 1$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \approx \frac{1}{4\pi r(h) j\omega} e^{-j\omega(t-r(h)/c)} \quad (7)$$

wobei  $z_h = z + h$ ,  $r_h = \sqrt{R^2 + z_h^2}$  ist.

Die von der Ebene reflektierte Welle verschwindet somit für hohe Frequenzen oder große Entfernungen, d.h. für nahezu senkrechten Schalleinfall bei  $Z = \rho c$ , was natürlich auch zu erwarten ist. Zum Abschluss wird noch der Fall eines einfallenden Dreiecksimpulses untersucht:

$$q_{\Delta}(t) = \begin{cases} t/T, & t \in [0, T] \\ (2T - t)/T, & t \in [T, 2T] \end{cases} \quad (8)$$

Eine einfache analytische Lösung für den Schalldruck kann wiederum in der Form

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \quad (9)$$

gewonnen werden, wobei  $p_1 + p_2$  der direkte plus der schallhart reflektierte Dreiecksimpuls und  $p_3$  ein Korrekturterm ist (siehe [1] für Details).

Das abschließende Rechenbeispiel zeigt Ergebnisse für  $h = 2\text{m}$ ,  $R=4\text{m}$  und  $T=0.001\text{s}$ . Für  $Z_0 = 10$  ist die Ebene nahezu schallhart, und entsprechend ergibt sich für das Gesamtsignal  $p \approx p_1 + p_2$  (Abb. 2). Für  $Z_0 = 1$  überwiegt die Absorption, und das reflektierte Signal verschwindet nahezu vollständig, d. h.  $p \approx p_1$  (Abb. 3). Schließlich erhält man für  $Z_0 = 0.1$  den fast schallweichen Fall und somit  $p_3 \approx -2p_2$  und daher  $p \approx p_1 - p_2$  (Abb. 4).

Der Autor dankt der DFG für die Förderung dieser Arbeit im Rahmen des Projektes „Akustische Halbraumprobleme und Greensche Funktionen“.

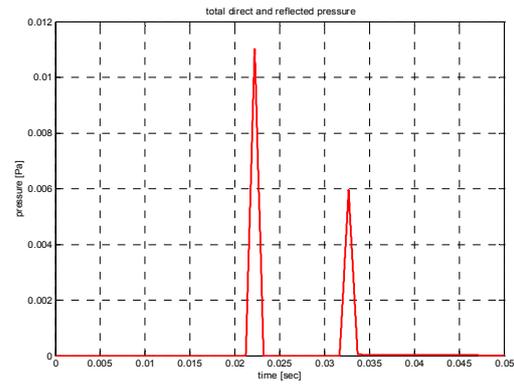


Abb. 2: Direktes plus reflektiertes Signal;  $Z_0 = 10$ .

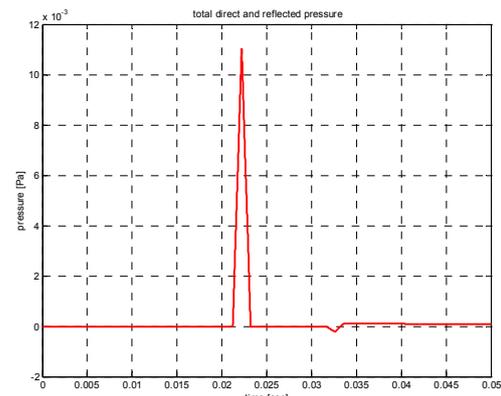


Abb. 3: Direktes plus reflektiertes Signal;  $Z_0 = 1$ .

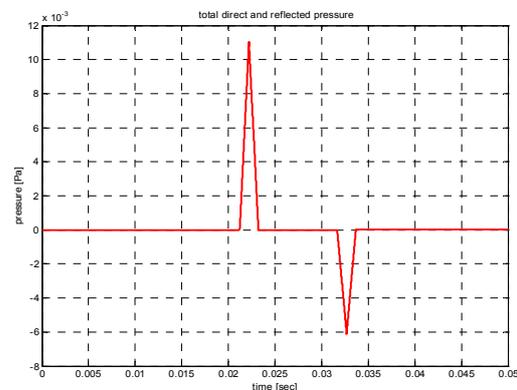


Abb. 4: Direktes plus reflektiertes Signal;  $Z_0 = 0.1$ .

## Literatur

- [1] M. Ochmann, Closed form solutions for the acoustical impulse response over a masslike or an absorbing plane, angenommen zur Veröffentlichung in: J. Acoust. Soc.; erscheint voraussichtlich in Band 129 (5), Mai 2011.
- [2] M. Ochmann, The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane, J. Acoust. Soc. Am. 116, 3304-3311 (2004).
- [3] M. Ochmann und H. Brick, "Acoustical radiation and scattering above an impedance plane," in: Chap. 17, S. Marburg (Editor) und B. Nolte (Editor): Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids. Finite and Boundary Element Methods, Springer-Verlag, Berlin, 459-494 (2008).