Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren höherer Ordnung für nichtlineare Erhaltungsgleichungen

Christian Henke[1]

[1] *Atlas Elektronik GmbH, 28309 Bremen, Deutschland, Email: christian.henke@atlas-elektronik.com*

Einleitung

Eine wichtige Anwendung in den Ingenieurwissenschaften und in der Physik ist die Berechnung der Strömungsakustik in Flüssigkeiten und Gasen. Es ist heute allgemein anerkannt, dass die mathematische Beschreibung der Strömungsakustik durch die *kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen* inklusive der Anfangs- und Randbedingungen sämtliche realen, nichtmikroskopischen Vorgänge erfasst. Die Navier-Stokes Gleichungen sind dabei nichts anderes als Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und der Energie im Kontinuum.

Vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Größenordnungen der hydrodynamischen und akustischen Wellenlängen bei Strömungen mit kleinen Machzahlen (Ma $\leq$ 0.3), ist ein hydrodynamisch/akustisches Splittingverfahren [SM06] eine effiziente Alternative zur Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Die dafür benötigte inkompressible Navier-Stokes Gleichung kann genau wie die kompressible Variante für die Geschwindigkeit $u : Q_T \to \mathbb{R}^m, Q_T = (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ in folgender Erhaltungsform geschrieben werden [HH98]:

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot F(u) - \nabla \cdot (D(u)\nabla u) = 0 \text{ in } Q_T \\ + \text{ Anfangs- und Randbedingungen,}\end{aligned} \tag{1}$$

wobei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{dm}$ die konvektive Flussdichte und $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{dm,dm}$ den Diffusionstensor bezeichnet.

Künstliche Diffusion

Die Diskretisierung von (1) liefert bei hohen Reynoldszahlen und moderaten Gitterweiten h jedoch unphysikalische Oszillationen in der diskreten Lösung U. Eine häufig verwendete Methode ist die Addition von künstlicher Diffusion mit einem Diffusionskoeffizient ϵ für den gilt: $\epsilon \to 0$ falls $h \to 0$. Zur Wahl von ϵ und zur Realisierung der künstlichen Diffusion im schwachen Sinne existiert eine Vielzahl von Ansätzen mit dem Ziel die Grenzschicht zu verbreitern, so dass diese mit der Gitterweite h aufgelöst werden kann. Neben diesen heuristischen Ansätzen soll in diesem Artikel ein mathematisches Argument vorgestellt werden, dass die Beschränktheit der auftauchenden Oszillationen für alle Gitterweiten garantiert. Ferner garantiert dieser Ansatz, dass die Konvergenzordnung nicht durch zu „viel“ künstliche Diffusion herabgesetzt wird.

Die Hauptschwierigkeiten der Navier Stokes Gleichungen ist zum einen die Nichtlinearität und zum anderen die spezielle Kopplung von (1). Damit das mathematische Argument verwendet werden kann, ist eine Trennung dieser Schwierigkeiten unter Fokussierung der Nichtlinearität erforderlich, d.h. es erfolgt für die Reynoldszahl Re $\to \infty$ die weitere Betrachtung des skalaren Falls ($m = 1$) von (1) :

$$\begin{aligned}\partial_t u + \nabla \cdot F(u) = 0 \text{ in } Q_T \\ + \text{ Anfangs- und Randbedingungen.}\end{aligned} \tag{2}$$

Die dabei gewonnene Formulierung des künstlichen Diffusionsterms kann anschließend an den allgemeinen Fall ($m > 1$) angepasst werden.

Die Näherung der reibungsbehafteten Gleichung (1) durch eine Gleichung ohne Reibung (2) stellt aus mathematischer Sicht auch bei hoher Reynoldszahl Re einen schwerwiegenden Eingriff dar, denn es entspricht dem Streichen des Differentialoperators mit der höchsten Ordnung. Da in diesem Fall ein anderer Typ von Differentialgleichungen entsteht, ändert sich i.Allg. auch das Verhalten der Lösung entscheidend. Dieses Verhalten führt zu Problemen bei der Betrachtung von schwachen Lösungen von (2). Eine eindeutige Lösung kann nun nicht mehr gewährleistet werden. Damit nicht genug: Man kann zeigen, dass unter diesen Lösungen solche existieren, die den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verletzen. Ferner dürfen die Randwerte nur auf dem Einflussrand, der aber im nichtlinearen Fall von der Lösung abhängt, vorgegeben werden. Aus diesem Grund muss für die Wohlgestelltheit des Problems (2) eine schwächere Randbedingung auf dem ganzen Rand gefordert werden [BRN79].

Die skalare Gleichung (2) bietet jedoch den Vorteil, dass für die exakte Lösung die Ungleichung

$$\|u\|_{0,\infty,Q_T} \leq C \tag{3}$$

gilt. Hierbei bezeichnet die L^∞-Norm $\|\cdot\|_{0,\infty,Q_T}$ das essentielle Supremum auf Q_T, welches als Maß für die in u enthaltenen Oszillationen zu interpretieren ist.

Damit ergeben sich folgende Anforderungen an die künstliche Diffusion:

- Realisierung einer eindeutigen diskreten Lösung U
- „Kompatibel“ mit einer geeigneten Randbedingung
- Für die diskrete Lösung U soll für alle h ebenfalls

$$\|U\|_{0,\infty,Q_T} \leq C \tag{4}$$

gelten.

Discontinuous Galerkin Methode

DG Methoden vereinen sowohl Eigenschaften von Finite Volumen Methoden (lokal konservativ, Verwendung von numerischen Flussdichtefunktionen) als auch Eigenschaften von Finite Elemente Methoden (einfache Realisierung von *hp*-Verfeinerungen) und sind daher prädestiniert für Anwendungen in der Strömungsmechanik/Strömungsakustik.

Die Discontinuous Galerkin Methode [JJS95, (2.7)] für $\Omega = \mathbb{R}^d$ wurde in [AH11, (3.5)] für ein Anfangs-Randwertproblem verallgemeinert.

In der Vergangenheit konnte die gleichmäßige Beschränktheit (4) nur mit Argumenten, die zum einen die Struktur spezieller Dreiecke bzw. Tetraeder ausnutzen und zum anderen lineare Ansatzfunktionen erfordern, bewiesen werden [SZE89], [SZE91].

Die Ausnutzung der Eigenschaften verschiedener Wertebereiche für lineare Operatoren in Banachräumen erlaubt es diese Aussage für wesentlich allgemeinere Gebietspartitionierungen und beliebige Polynomgrade zu garantieren [AH11]. Dies geschieht in dem ein Koerzivitätsresultat für den schwachen Diffusionsterm

$$\int_T \nabla U \cdot \nabla v \, dx$$

mit $v = I_h(U^{q-1})$ unabhängig von q und h gezeigt wird. Hierbei bezeichnet I_h den Lagrangeschen Interpolationsoperator und q eine natürliche gerade Zahl.

Damit bleiben die Oszillationen der diskreten Lösung unabhängig von der Gitterweite der Partitionierung genau wie bei der exakten Lösung stets unterhalb einer gewissen Schranke. Aus diesem Grund eignet sich die DG Methode [AH11, (3.5)] auch bei moderaten Schrittweiten hervorragend für konvektionsdominierende Problemstellungen wie sie auch in der Strömungsakustik auftreten.

Literatur

[AH11] L. Angermann and C. Henke. $L^\infty(L^\infty)$-boundedness of DG(p)-solutions for nonlinear conservation laws with boundary conditions. *arXiv:1011.2750v1*, 2010

[BRN79] First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. in Partial Differential Equations*, 4(9):1017–1034, 1979.

[HH98] G. Hauke and T. J. R. Hughes. A unified approach for compressible and incompressible flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 113:389–395, 1994.

[JJS95] J. Jaffré, C. Johnson, and A. Szepessy. Convergence of the discontinuous galerkin finite element method for hyperbolic conservation laws. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5(3):367–386, 1995.

[SM06] J. H. Seo and Y. J. Moon. Linearized Perturbed Compressible Equations for Low Mach number Aeroacoustics. *J. Comp. Phys.*, Vol. 218, 702–719, 2006.

[SZE89] A. Szepessy. Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimensions. *Math. Comp.*, 53(188):527–545, 1989.

[SZE91] A. Szepessy. Convergence of a streamline diffusion finite element method for scalar conservation laws with boundary conditions. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25(6):749–782, 1991.