

# Deviationswellen im Festkörper.

O. Bschorr

Aeroakustik Stuttgart

## Zusammenfassung.

Die deviatorische Wellenbewegung ist durch Volumentreue ( $\text{div} = 0$ ) und durch Rotationsfreiheit ( $\text{rot} = 0$ ) definiert. Diese Eigenschaften werden von allen Lösungen der skalaren Laplace-Gleichung erfüllt und konstituieren damit deviatorische Bewegungen. Die Laplace-Lösungen enthalten die zeitlichen Ein- und Ausschwingvorgänge, die räumlichen Randbedingungen, Nahfelder und auch Oberflächenwellen. Zur Beschreibung von Deviationswellen wird es notwendig, die Kräftebilanz der Cauchy'schen Bewegungsgleichung durch eine Impulsbilanz zu ersetzen. Danach hat die Oberflächenwelle eines homogenen, isotropen Festkörpers der Dichte  $\rho$  und dem Deviationsmodul  $E_{\text{Dev}}$  die Phasengeschwindigkeit  $c_{\text{Dev}} = \sqrt{(E_{\text{Dev}}/\rho)}$ .

## Einleitung.

Kinematisch setzt sich jede lineare elastische Verformung in einem Festkörper aus 3 irreduziblen Komponenten zusammen: aus der Dilatation (Dil), der Rotation (Rot) und aus der Deviation (Dev). Speziell die Deviation – die ältere Bezeichnung lautet Verzerrung – umfasst die divergenz- und rotationsfreie Bewegung und ist durch den symmetrischen, spurfreien  $3 \times 3$  Tensor – den Deviator – gekennzeichnet. Dieser hat die gleiche Mathematik wie das Deviationsmoment beim Kreisel. Während bei Betten [1; z.B. 2] deviatorische Effekte explizit angesprochen sind, finden sich in der Standardliteratur zur Kontinuumsmechanik und zur Elastizitätstheorie – wenn überhaupt – nur vereinzelte, versprengte Erwähnungen.

Die Auslenkung der Longitudinalwelle setzt sich nach [5] zu  $\frac{1}{3}$  aus Dilatation und zu  $\frac{2}{3}$  aus Deviation und bei der Transversalwelle hälftig aus Rotation und Deviation zusammen. Im ebenen Fall gewährleisten die Cauchy-Riemann-Relationen eine rein deviatorische Bewegung. Um diese Eigenschaft von 2D auf 3D zu erweitern, hat Hamilton die Quaternionen konstruiert.

Ergänzend zum **div**- und zum **rot**-Operator wurde in [3] zur Kennzeichnung der deviatorischen Bewegung der **dev**-Operator eingeführt. In der Longitudinalwelle wird eine **div**- und in der Transversalwelle eine **rot**-Störung übertragen. In diesem Kontext stellt sich die Frage, inwieweit sich eine **dev**-Störung als deviatorische Welle ausbreitet.

## Deviation.

*Elastische Verformung.* Vorgegeben ist ein homogener, isotroper und verlustfreier Festkörper mit den kartesischen  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_k$  – Koordinaten. An der Stelle  $x,y,z$  [m] bestehe die elastische vektorielle Auslenkung  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x,y,z,t)$  [m]

$$\mathbf{s} = s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k} \quad (1)$$

und der für die lineare Verformung relevante, aus 9 unabhängigen Komponenten bestehende Tensor  $\nabla \mathbf{s}$  [-].

$$\nabla \mathbf{s} = \begin{matrix} \partial s_x / \partial x & \mathbf{ii} & \partial s_x / \partial y & \mathbf{ij} & \partial s_x / \partial z & \mathbf{ik} \\ \partial s_y / \partial x & \mathbf{ji} & \partial s_y / \partial y & \mathbf{jj} & \partial s_y / \partial z & \mathbf{jk} \\ \partial s_z / \partial x & \mathbf{ki} & \partial s_z / \partial y & \mathbf{kj} & \partial s_z / \partial z & \mathbf{kk} \end{matrix} \quad (2)$$

Nach Tab. 1k lässt sich der Tensor  $\nabla \mathbf{s} = \Sigma^{\#} \nabla \mathbf{s}_{\#}$  auf die 3 notwendig/hinreichenden und wechselseitig orthogonalen Komponenten  $\# = \{\text{Dil}, \text{Rot}, \text{Dev}\}$  zurückführen: *Dil*: Die formtreue Dilatation  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}}$  geht auf den skalaren **div** – Operator zurück und hat Monopol-Charakter. *Rot*: Die volumentreue Rotation  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}}$  folgt aus dem vektoriellen **rot**-Operator und hat als Dipol 3 Bestimmungsgrößen. *Dev*: Die volumen- und richtungstreue Deviation  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}}$  leitet sich von dem 5-komponentigen, dyadischen **dev**-Operator ab und entspricht einem Quadrupol. (Tab.1d-f) Den in Tab.1b skizzierten Verformungsarten  $\#$  wird je ein Elastizitätsmodul  $E_{\#}$  und damit in linearer Näherung der Spannungstensor  $\mathbf{T}_{\#} = E_{\#} \nabla \mathbf{s}_{\#}$  [Pa] und die Volumenkraft  $\mathbf{f}_{\#} = \text{div } \mathbf{T}_{\#} = E_{\#} \Delta \mathbf{s}_{\#}$  [ $\text{N}/\text{m}^3$ ] zugeordnet. (Tab.1k,l,m)

a. Dilatation (Dil)      Rotation (Rot)      Deviation (Dev)



c. <b>Volumen-Änderung</b>	<b>Richtungs-Änd.</b>	<b>Gestalts-Änd.</b>
d. <b>Monopol</b>	<b>Dipol</b>	<b>Quadrupol</b>
e. <b>div s = Skalar</b>	<b>rot s = Vektor</b>	<b>dev s = Tensor</b>
f. $\mathbf{s}_{\text{Dil}} = \nabla \Phi$ für $\Delta \Phi \neq 0$	$\mathbf{s}_{\text{Rot}} = \text{rot } \mathbf{A}$	$\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla \Phi // \Delta \Phi = 0$
g. <b>div s<sub>Dil</sub> = div s</b>	<b>rot s<sub>Rot</sub> = rot s</b>	<b>dev s<sub>Dev</sub> = dev s</b>
h. <b>rot s<sub>Dil</sub> = 0</b>	<b>dev s<sub>Rot</sub> = 0</b>	<b>div s<sub>Dev</sub> = 0</b>
i. <b>dev s<sub>Dil</sub> = 0</b>	<b>div s<sub>Rot</sub> = 0</b>	<b>rot s<sub>Dev</sub> = 0</b>
k. $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \mathbf{U} \text{ div } \mathbf{s}$	$\nabla \mathbf{s}_{\text{Rot}} = -\frac{1}{2} \mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{s}$	$\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \text{dev } \mathbf{s}$
l. $\Delta \mathbf{s}_{\text{Dil}} = \frac{1}{3} \text{grad div } \mathbf{s}$	$\Delta \mathbf{s}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \text{rot rot } \mathbf{s}$	$\Delta \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \Delta \nabla \Phi = 0$
m. $E_{\text{Dil}} = K$ [Pa]	$E_{\text{Rot}} = G$ [Pa]	$E_{\text{Dev}} = G$ [Pa]

Tab. 1. Reduktion des linearen elastischen Auslenkungsvektors  $\mathbf{s}$  und des  $3 \times 3$ -Tensors  $\nabla \mathbf{s}$  auf die 3 orthogonalen Verformungstypen Dilatation, Rotation und Deviation.

*Deviation.* Vorgegeben sei eine Lösung  $\Phi$  [ $\text{m}^2$ ] der skalaren Laplace-Gleichung  $\Delta \Phi = 0$ . (3) Bekanntlich dienen diese Lösungen zur Anpassung an räumliche und/oder zeitliche Randbedingungen. Ohne den Nachweis auf Vollständigkeit wird für die deviatorische Auslenkung  $\mathbf{s}_{\text{Dev}}$  das Potential (4)  $\mathbf{s}_{\text{Dev}} := \text{grad } \Phi = \nabla \Phi$  angesetzt. ( $\Phi_{,x} = \partial \Phi / \partial x$ ,  $\Phi_{,y} = \partial \Phi / \partial y$ , ...  $\Phi_{,xy} = \Phi_{,yx} = \partial^2 \Phi / \partial x \partial y$ , ...)

$$\Delta \Phi = \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} + \Phi_{,zz} = 0 \rightarrow \Phi = \Phi(x,y,z,t) \quad (3)$$

$$\mathbf{s}_{\text{Dev}} := \nabla \Phi = \Phi_{,x} \mathbf{i} + \Phi_{,y} \mathbf{j} + \Phi_{,z} \mathbf{k} \quad (4)$$

Die Proben nach **div s<sub>Dev</sub> = div grad Φ = ΔΦ := 0** bestätigen die Volumentreue und nach **rot s<sub>Dev</sub> = rot grad Φ = 0** die Rotationsfreiheit der deviatorischen Verformung  $\mathbf{s}_{\text{Dev}}$ . Für den Spannungstensor  $\mathbf{T}_{\text{Dev}}$  wird der Gradient  $\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}}$

$$\nabla \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla \nabla \Phi = \begin{matrix} \Phi_{,xx} & \mathbf{ii} & \Phi_{,xy} & \mathbf{ij} & \Phi_{,xz} & \mathbf{ik} \\ \Phi_{,yx} & \mathbf{ji} & \Phi_{,yy} & \mathbf{jj} & \Phi_{,yz} & \mathbf{jk} \\ \Phi_{,zx} & \mathbf{ki} & \Phi_{,zy} & \mathbf{kj} & \Phi_{,zz} & \mathbf{kk} \end{matrix} \quad (5)$$

und für die Volumenkraft  $\mathbf{f}_{\text{Dev}}$  die Laplace-Funktion  $\Delta \mathbf{s}_{\text{Dev}}$

$$\Delta \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \Delta \nabla \Phi = \nabla \Delta \Phi = \nabla 0 = \mathbf{0}. \quad (6)$$

benötigt. Das  $\Delta \mathbf{s}_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$ -Ergebnis führt mit  $\mathbf{f}_{\text{Dev}} = E_{\text{Dev}} \Delta \mathbf{s}_{\text{Dev}}$  auf  $\mathbf{f}_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$  und entzog/entzieht sich einer Kräftebilanz.

1. *Fallbeispiel*: Fig. 1 zeigt einen halbunendlichen Festkörper der Dichte  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] und dem Deviationsmodul  $E_{\text{Dev}}$  [Pa]. An seiner Oberfläche  $y \geq 0$  bestehe die in  $x$ -Richtung laufende 2D-Oberflächenwelle mit der Frequenz  $\omega$  [rad/s], der Wellenzahl  $k$  [rad/m], dem Potential  $\Phi$  (7) [m<sup>2</sup>] und hat den deviatorischen Schwingungsausschlag  $\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla\Phi$  [m]. Setzung:  $(\omega t - kx) = \varphi$ .

$$\Phi(x,y,t) = A \cosh ky \cos(\omega t - kx) \quad (7)$$

$$\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla\Phi = Ak(\cosh ky \sin \varphi \mathbf{i} + \sinh ky \cos \varphi \mathbf{j}) \quad (8)$$

Die Probe nach  $\Delta\Phi = \Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = 0$  bestätigt, dass  $\Phi$  (7) eine Lösung der Laplace-Gleichung ist und dass auch die Deviationseigenschaften  $\text{div } \mathbf{s}_{\text{Dev}} = 0$  und  $\text{rot } \mathbf{s}_{\text{Dev}} = 0$  erfüllt sind. Bei einem Deviationsmodul  $E_{\text{Dev}}$  [Pa] ist der Spannungstensor  $\mathbf{T}_{\text{Dev}}$  [N/m<sup>2</sup>]. (9). Die Divergenz  $\text{div } \mathbf{T}_{\text{Dev}} = \mathbf{f}_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$  [N/m<sup>3</sup>] (10) liefert keine zur Aufstellung eines Kräftegleichgewichtes notwendige Volumenkraft.

$$\mathbf{T}_{\text{Dev}} = E_{\text{Dev}} \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}} \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_{\text{Dev}} = \text{div } \mathbf{T}_{\text{Dev}} = E_{\text{Dev}} \text{div } \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}} = E_{\text{Dev}} \nabla\Delta\Phi \equiv \mathbf{0} \quad (10)$$

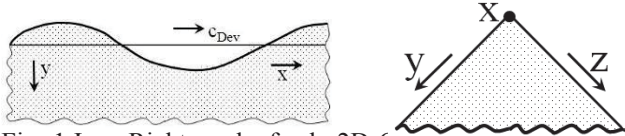


Fig. 1: In  $x$ -Richtung laufende 2D-Oberflächenwelle eines halbunendlichen Festkörpers. Die Amplitude fällt exponentiell mit dem Abstand  $y$  zur Oberfläche.

Fig. 2: In  $x$ -Richtung, (= senkrecht zur Zeichenebene) entlang einer 90°-Kante laufende 3D-Oberflächenwelle.

2. *Fallbeispiel*. (Fig. 2) Experimentell einfacher nachzuprüfen ist eine entlang einer 90°-Kante in  $x$ -Richtung laufende 3D-Welle. Der 90°-Wellenleiter hat die Koordinaten  $y, z \geq 0$ . Mit dem Potential  $\Phi$  (10) besteht die Auslenkung  $\mathbf{s}_{\text{Dev}}$  und der Gradient  $\nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}}$

$$\Phi(x,y,t) = A \cosh k(y+z)/\sqrt{2} \cos(\omega t - kx) \quad (11)$$

$$\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla\Phi = \Phi_{,x} \mathbf{i} + \Phi_{,y} \mathbf{j} + \Phi_{,z} \mathbf{k} \quad \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \nabla\nabla\Phi \quad (12,13)$$

Die Nachrechnung zeigt, dass auch hier die freie Volumenkraft  $\mathbf{f}_{\text{Dev}} = \mathbf{0}$  verschwindet. Die Cauchy-Kräftebilanz

$$\rho\mathbf{s}^{\circ\circ} + \text{div } \mathbf{T}_{\text{Dev}} = \rho\mathbf{s}^{\circ\circ} + \mathbf{f}_{\text{Dev}} = \rho\mathbf{s}^{\circ\circ} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (14)$$

ist damit unterbestimmt und soll durch eine Impulsbilanz ersetzt werden.

### Impulsbilanz.

*KPK-Ansatz* [6,7]. Die auf Falk und Ruppel zurückgehende Karlsruher KPK-Schule führt die nach Huygens benannte Impulseinheit (=Masse mal Geschwindigkeit) [Hy]  $\equiv$  [mkg/s] ein. Danach besteht in einem Wellenleiter mit der spezifischen Dichte  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] und der vektoriellen Schnelle  $\mathbf{s}^{\circ}$  [m/s] der spezifische Impuls  $\rho\mathbf{s}^{\circ}$  [Hy/m<sup>3</sup>]. Pflanz sich die Schnelle  $\mathbf{s}^{\circ}$  mit der Wellengeschwindigkeit  $\mathbf{c}$  [m/s] fort, so liefert das dyadische Produkt  $\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^{\circ}$  [Hy/sm<sup>2</sup>] den lokalen Impulsfluss (= Hy pro Zeit- und Flächeneinheit). In Analogie zur Cauchy-Kräftegleichung soll dieser Teil als kinetischer Impulsfluss bezeichnet werden, der mit dem potentiellen Impulsfluss, dem Spannungstensor  $\mathbf{T}$  [Hy/sm<sup>2</sup>] im lokalen Gleichgewicht steht.

$$\rho\mathbf{c}\mathbf{s}^{\circ} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Für die Deviationswelle mit  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_{\text{Dev}} = E_{\text{Dev}} \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}}$  und  $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}_{\text{Dev}}$  lautet diese Bilanz

$$\rho \mathbf{c}_{\text{Dev}} \mathbf{s}_{\text{Dev}}^{\circ} + \mathbf{T}_{\text{Dev}} = \rho \mathbf{c}_{\text{Dev}} \mathbf{s}_{\text{Dev}}^{\circ} + E_{\text{Dev}} \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \mathbf{0} \quad (16)$$

Während es sich bei der konventionellen Cauchy-Bilanz um Kraftvektoren – um Tensoren 1. Ordnung - handelt, geht es bei den Impulsflüssen um Tensoren 2. Ordnung. Über die skalare Multiplikation von (16) mit  $\mathbf{c}_{\text{Dev}}$  lässt sich die Tensor- auf die Vektorgleichung (17) der Dimension [Hy/kg = m/s] zurückführen und liefert beifolgend die Wellengeschwindigkeit  $c_{\text{Dev}}$ . (18).

$$\mathbf{s}_{\text{Dev}}^{\circ} + \mathbf{c}_{\text{Dev}} \nabla\mathbf{s}_{\text{Dev}} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$c_{\text{Dev}} = \omega/k = \sqrt{E_{\text{Dev}}/\rho} \quad (18)$$

Von der Ableitung her, gelten die Impulsleichgewichte (16) bzw. (17) nicht nur für deviatorische, sondern gleichermaßen für longitudinale und transversale Festkörperwellen  $\xi$  mit den lokalen Wellengeschwindigkeiten  $c_{\xi}$ . Liest man den Ausdruck  $\mathbf{c}_{\xi} \nabla\mathbf{s}_{\xi}$  als Konvektivterme einer mit der Wellengeschwindigkeit  $\mathbf{c}_{\xi}$  bewegten Störung  $\nabla\mathbf{s}_{\xi}$ , dann entspricht (19) der absoluten Zeitableitung  $Ds/Dt$

$$Ds/Dt = \Sigma^{\xi} (\mathbf{s}_{\xi}^{\circ} + \mathbf{c}_{\xi} \nabla\mathbf{s}_{\xi}) = \mathbf{0} \quad (19)$$

und man kann  $Ds/Dt = \mathbf{0}$  als Erhaltungssatz für die lineare, elastische Schwingungsauslenkung  $\mathbf{s}$  interpretieren. ( $\Sigma^{\xi}$  = Summe über die lokal existierenden Wellenarten  $\xi$ )

Die Kräfte- und die Impulsbetrachtung unterscheiden sich mathematisch um eine Differentiationsstufe; während beim Kräftegleichgewicht mit der Beschleunigung  $\mathbf{s}^{\circ\circ} = \partial^2\mathbf{s}/\partial t^2$  die zweifache Zeitableitung eingeht, ist der Impuls von der Geschwindigkeit  $\mathbf{s}^{\circ} = \partial\mathbf{s}/\partial t$  mit nur einer Zeitableitung bestimmt. Auch die räumliche Differentiation erfordert beim Impuls eine Ableitung weniger. Während die konventionelle Wellengleichung  $\mathbf{s}^{\circ\circ} - c^2 \Delta\mathbf{s} = \mathbf{0}$  gleichermaßen für +/-  $c$  gilt, ist die Wellenrichtung in der impulsbezogenen Gleichungen (15) bzw. (19) festgelegt.

*Nichtlineare Impulsbilanz*. Das Impulsleichgewicht (15) betrifft die lineare Näherung für  $c \gg s^{\circ}$ . In der exakten Bilanz ist zu ersetzen  $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + \mathbf{s}^{\circ}$ . Damit erweitert sich die Impulsbilanz um den Term  $\mathbf{Q} = \rho\mathbf{s}^{\circ}\mathbf{s}^{\circ}$ .

$$\rho(\mathbf{c} + \mathbf{s}^{\circ}) \mathbf{s}^{\circ} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\mathbf{Q} = \rho\mathbf{s}^{\circ}\mathbf{s}^{\circ} \quad (21)$$

Mit der Wellenenergie  $e = 2e_{\text{kin}} = \rho(\mathbf{s}^{\circ})^2$  und der Wellenrichtung  $\mathbf{t}$  wird  $\mathbf{Q} = \text{ett}$ . Dieser Term ist gleich dem in [3] heuristisch eingeführten Impulstensor  $\mathbf{Q}'$  zur Berechnung der Strahlungskräfte  $\mathbf{f}_{1,5} = \text{div } \mathbf{Q}'$  [N/m<sup>3</sup>] und der Strahlungsdrücke  $\mathbf{p} = \text{Div } \mathbf{Q}'$ . [N/m<sup>2</sup>].

### Literaturverzeichnis.

- [1] J. Betten: Zur Modifikation des Spannungsdeviators. Acta Mechanica 27, 173-184(1977)
- [2] J. Betten: Tensorrechnung... Teubner-Verl. Stgt. (1987)
- [3-5] O. Bschorr, J. Starke: DAGA-Fortschritte Akustik. [3] 2010. S. 919/20, [4] 2011 S. 237/8. [5] 2013. S 1262/3.
- [6] G. Falk, W. Ruppel: Mechanik. Relativität. Gravitation. Springer-Verlag, Berlin. (1989).
- [7] F. Herrmann: Skripten zur Experimentalphysik. Universität Karlsruhe. (1997).