

Cochlea-Wellenleiter

O. Bschorr

Aeroakustik, Stuttgart.

Zusammenfassung

Bekannt ist die Moens/Korteweg-Wellenleitung in einem fluidgefüllten Elastikschlauch. Eine analoge Situation besteht in der Cochlea: Auch hier fungiert die Lymph-Flüssigkeit als – inkompressible, nur kinetische, nicht aber potentielle Energie speichernde – Masse, die zusammen mit der Basilarmembran als Federelement eine Wellenbewegung bewerkstelligt. Kinematisch handelt es sich in beiden Fällen um Deviationswellen. Gegenüber Moens/Korteweg hat die Cochlea-Welle eine orts- und frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit. Entscheidend sind die von den Békécy-Resonanzstellen der Basilarmembran BM verursachten Impedanzbrüche. Diese wirken als spektrale Absorber und/oder Reflektoren. Um diese Vorstellung numerisch zu bestätigen, wurde für die Scala vestibuli SV, als maßgebender Wellenleiter ein FE-gerechtes Rechenmodell aufgestellt. Danach besteht eine in Laufrichtung ansteigende Welle mit einem Maximum an und einem rapiden Abfall nach der Békécy-Resonanzstelle. Das zugrunde gelegte FE-Modell ist zur Bereitstellung eines reflexionsfreien Abschlusses, weniger aber zur Maximierung einer Resonanz/Antiresonanz-Dynamik geeignet.

Cochlea-Modell

Es soll ein FE-Modell der Cochlea aufgestellt werden, um damit die auch experimentell messbare Eingangsimpedanz der Cochlea und die Schwingungsform der Basilarmembran zu berechnen. Dazu wird auf die Vorarbeiten [1,2,3] Bezug genommen. Die Cochlea CO setzt sich aus 3 gekoppelten Wellenleitern zusammen: aus Scala vestibuli SV, Basilarmembran BM und Scala thymbani ST. Diese sind eindimensional, haben die gemeinsame Länge L [m] und sind durch Orts- x [m] und Zeit- Koordinate t [s] festgelegt.

Wellenleiter SV: Die Querschnittsfläche von SV sei $A = A(x)$ [m²]. Bei einer Anregung über das ovale Fenster OF bei $x = 0$ führt das Fluid in SV eine Moens/Korteweg-Welle aus, gekennzeichnet durch die t- und x-abhängigen Ausschlag s [m], die Schnelle $v = s^\circ = ds/dt$ [m/s] und den Druck p [Pa]. Mit der Dichte ρ [kg/m³] = const wird inkompressibles Fluid unterstellt. Während bei Moens/Korteweg der gesamte Leiternmantel flexibel ist, wird hier die BM-Elastizität zugrunde gelegt und liefert nach [1] die frequenz- und ortsabhängige Wellengeschwindigkeit c [m/s].

$$c^2 = c^2(\omega, x) = (\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta \omega_0 \omega) mA / \rho B \quad (1)$$

Darin bezeichnen $B = B(x)$ [m] die modale Breite und $m = m(x)$ [kg/m²] die Massenbelegung von BM. An der Stelle $x = x_0$ befinden sich BM-Resonatoren mit dem Verlustfaktor η [-] und der Resonanzfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi = f_0(x)$ [Hz].

$$f_0 = f_{\text{Max}} \exp hx \quad h = \ln(f_{\text{Min}}/f_{\text{Max}})/L \quad (2)$$

Bei einer Amplitude s_0 [m] und der Frequenz ω [rad/s] überträgt die SV-Welle die Leistung N_{SV} [W]

$$N_{\text{SV}} = \frac{1}{2} \rho c A (\omega s_0)^2 \quad (3)$$

Die Wellengeschwindigkeit c erfährt an der Stelle $x = x_0$ einen Vorzeichenwechsel $\text{sign}\{\omega_0^2 - \omega^2\} = \pm 1$. Bei $\text{sign} = +1$, im Bereich $0 < x < x_0$ besteht eine Moens/Korteweg-Welle. Bei $\text{sign} = -1$, bei $x_0 < x$ kommt es zu einem exponentiellen Schwingungsabfall s , so dass der SV-Abschnitt von x_0 bis L außer Betracht bleiben kann.

Wellenleiter BM: Bei BM handelt es sich um einen mit Radius R [m] gebogenen, federunterstützten und im allgemeinen Fall unter Zug stehenden Biegebalken. Ein solcher 1D-Wellenleiter ist zusätzlich durch die Querschnittsfläche S [m²], das Flächenträgheitsmoment J [m⁴], den Elastizitätsmodul E [Pa], die Federbettung K [N/m²] und die Zugspannung Z [N] spezifiziert. Mit dem Schwingungsaussschlag y [m] und $y' = dy/dx$ [-], $y^\circ = dy/dt$ [m/s] lautet das Kräftegleichgewicht (4) und liefert die Wellengeschwindigkeit a [m/s].

$$mBy^{\circ\circ} + EJy'''' + (2EJ/R^2 - Z)y'' + (K + EJ/R^4 + (ES - Z)/R^2)y = 0$$

$$a^2(\omega, x) = c_B^2 / (\sqrt{(1/4)(c_S/c_B)^4 - (\omega_0/\omega)^2} - 1) - \frac{1}{2}(c_S/c_B)^2 \quad (5)$$

$$c_B^2 = \omega \sqrt{(EJ/mB)} \quad c_S^2 = (Z - 2EJ/R^2)/mB \quad (6/7)$$

$$\omega_0^2 = (K + EJ/R^4 + Z/R^2 + ES/R^2)/mB \quad (8)$$

Bei einer Wegamplitude y_0 [m] ist die in BM übertragene Wellenleistung N_{BM} [W]. Das Verhältnis der Amplituden y_0 und s_0 folgt aus der Kompatibilität nach [2. Gleichung 28] $As' + By = 0$. ($k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ [rad/m] = Wellenzahl)

$$N_{\text{BM}} = \frac{1}{2} a m (\omega y_0)^2 \quad (9)$$

$$y_0/s_0 = kA/B = 2\pi A/B\lambda \quad (10)$$

Es wird daran erinnert, dass dank der aktiven Cochlea nicht nur die Dämpfung, sondern auch alle anderen Parameter verstellbar sind und dass bei zeitlich konstanter Verstellung das passive Modell weiter beibehalten werden kann. -Wegen der unsicheren Bestimmungsgrößen und der Komplexität wird auf eine weitergehende Analyse verzichtet, ersatzweise werden Koinzidenz mit $a = c$ und bei ungekoppelten Resonanzstellen $a = 0$ herangezogen.

Wellenleiter ST. Wie auch die FE-Rechnungen (Abb. 1a) zeigen, haben die s- und y-Ausschläge an den Bekesy-Resonanzstellen ein ausgeprägtes Maximum und wirken als Wellensender in ST. Während die Wellenleistungen N_{SV} und N_{BM} in positiver x-Richtung transportiert werden, besteht so in ST ein entgegengesetzter Energietransport. Auffallend ist die Kongruenz von Scala thymbani ST mit SV. Wenn auch die Steifigkeiten vom ovalen und runden Fenster übereinstimmen, besteht in SV und ST ein gegenphasiges Wellenfeld.

Orientierungsrechnungen.

Vergleich der Wellenleistungen in SV, BM und ST. Für den Transport von Signalleistung werden hier nur die in den SV- und BM-Wellenleitern übertragenen Leistungen mit dem Verhältnis N_{BM}/N_{SV} herangezogen.

$$N_{BM}/N_{SV} = (a/c)(m/\rho A)(y_0/s_0)^2 \quad (11)$$

Für eine Abschätzung wird Koinzidenz mit $a/c = 1$ angenommen. Das Verhältnis y_0/s_0 folgt aus der Bedingung (10) und ergibt einen y_0/s_0 -Wert kleiner 1. (λ [m] = lokale Wellenlänge). Ausschlaggebend ist der Term $m/\rho A$. Näherungsweise für BM und SV gleiche Dichte ρ unterstellt, wird $m/\rho A \approx S/A \ll 1$.

FE-Modell. Wegen der Dominanz $N_{SV} \gg N_{BM}$ wird die FE-Rechnung auf SV beschränkt. Im Hörbereich von $f_{Min} = 20$ Hz bis $f_{Max} = 20$ kHz wird Scala vestibuli SV als 1D-Wellenleiter der Länge $L = 35$ [mm], der Dichte $\rho = 1000$ [kg/m³] und dem Elastizitätsmodul $E = \rho c^2$ [Pa] nachgebildet.

$$E = \rho c^2 = \rho(\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta \omega_0 \omega)F \quad (12)$$

Für eine Orientierung sind die Einzelparameter aus (1) nach $F = F(x) = mA/\rho B$ [m²] zusammengefasst.

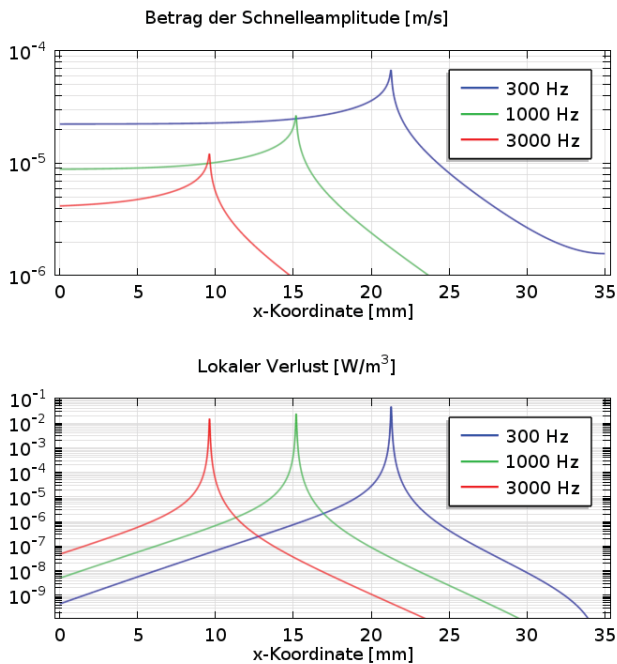


Abb. 1 Der SV-Wellenleiter wird an der Stelle $x = 0$ [m] mit einer Druckamplitude $p = 1$ [Pa] und den Frequenzen $f = 300; 1000$ und 3000 [Hz] angeregt. Die in Fig. 1a dargestellte Schnelleamplitude $s^o = v$ [m/s] steigt in Wellenrichtung x an und hat bei Resonanz $f = f_0$ an der Stelle x_0 ein ausgeprägtes Maximum. Im SV-Bereich $x_0 < x < L$ besteht eine aperiodische Dämpfung. In Abb. 1b ist die Energieabgabe („Verlust“) von SV auf die Basilarmembran BM wiedergegeben und zeigt an den Békésy-Stellen x_0 ein signifikantes Absorptions-Maximum. Mit dem gewählten Modell lässt sich ein reflexionsfreier Abschluss erreichen, eignet sich aber weniger zur Realisierung einer großen Resonanz/Antiresonanz-Dynamik.

Einstellungen: $F = 2 \cdot 10^{-5}$ [m²] Verlustfaktor $\eta = 0,01$.

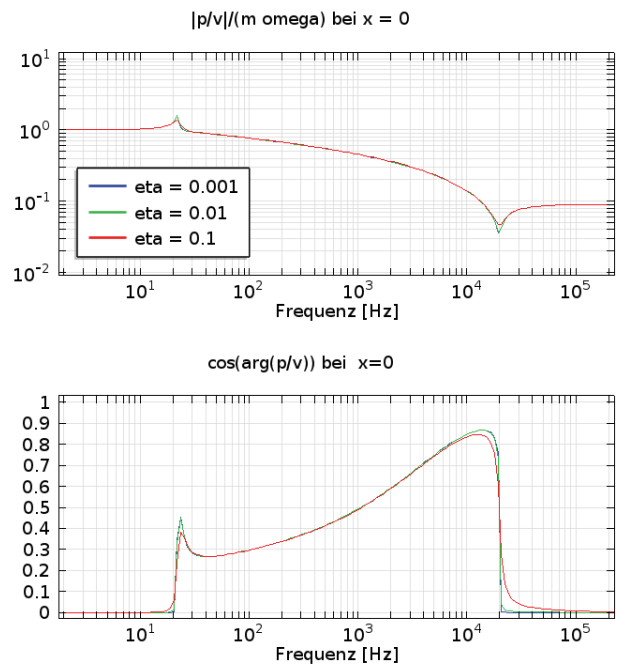


Abb. 2a/b: Auf $z_0 = \omega \rho L$ [kg/sm²] normierte Impedanz $z = p/v$ [kg/sm²] und Phase $\cos \arg z$ [-] des SV-Wellenleiters an der Erregerstelle $x = 0$ sind über den Hörbereich von 20 Hz bis 20 kHz unabhängig vom BM-Verlustfaktor $\eta > 0$ gleich. Bereich $\eta \leq 0$ ist instabil. Einstellung $F = 10^{-5}$ [m²]

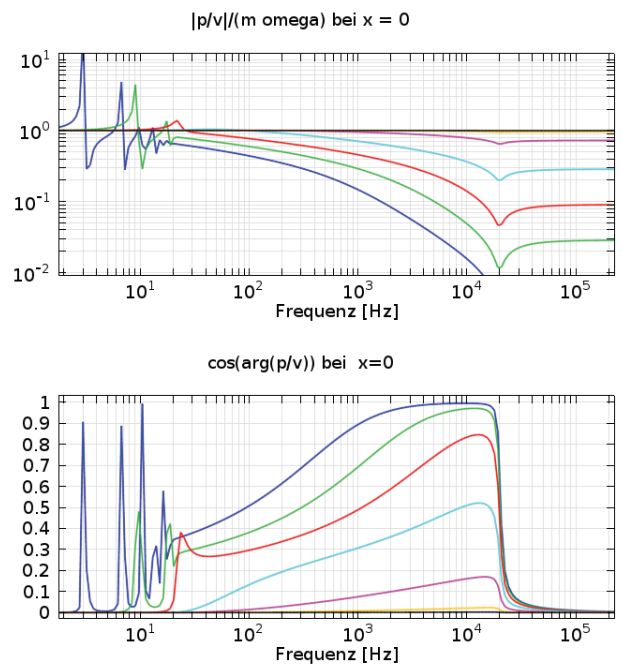


Abb. 3a/b: Auf $z_0 = \omega \rho L$ [kg/sm²] normierte Impedanz $z = p/v$ [kg/sm²] und Phase $\cos \arg z$ [-] des SV-Wellenleiters an der Erregerstelle $x = 0$. Variation des Parameters $F = 10^{-11}$ [m²] mit $n = 7$ (blau) bis $n = 1$ (dunkelbraun). Erkennbar an $z/z_0 \rightarrow 1$ und $\cos \arg z \rightarrow 0$ entspricht der Fall $n = 1$ einem Starrkörper. Einstellung: $\eta = 0,1$.

Vorarbeiten. Danksagung.

[1,2,3] O. Bschorr, H. Albrecht: DAGA. Fortschritte der Akustik. [1] 2012 S. 857. [2] 2012. S. 553. [3] 2013. S. 172.

Die numerischen Berechnungen mit COMSOL (Abb. 1 bis 3) wurden von Herrn Prof. W. Maysenhölder, Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, beigesteuert.