

# Die inhomogene Galbrun-Gleichung: Herleitung und Ansätze zur numerischen Lösung

Marcus Guettler<sup>1</sup>, Steffen Marburg<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr München, 85577 Neubiberg, Deutschland*

## Einleitung

Der Bereich der Aeroakustik beschäftigt seit den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts eine Vielzahl von Ingenieuren. Die noch junge Disziplin befasst sich grundlegend mit der Entstehung und der Ausbreitung von Schallwellen in strömenden Medien. Als Beispiel sei hier die turbulente Strömung in und hinter einem Flugzeugtriebwerk genannt. Eine derartige Strömung und die damit verbundene akustische Abstrahlung ins Fernfeld ist mithilfe der Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Fluide beschreibbar. Durch die mathematischen Eigenschaften und dem damit verbundenen Lösungsaufwand sind diese allerdings für industriennahe Anwendungen unzureichend. Um sich dennoch der Problematik zu nähern, entstanden eine Vielzahl von akustischen Analogien, die weitestgehend auf die Arbeiten von Lighthill, Curle und Ffowcs Williams und Hawkings zurück gehen. Vereinfachte Formulierungen der Navier-Stokes-Gleichungen sind als linearisierte Euler-Gleichungen oder Störungsgleichungen bekannt. Einen anderen Ansatz verfolgte Galbrun [3]. Er betrachtete eine akustische Welle in einer Strömung als Differenz zwischen einer gestörten Strömung und einer Referenzströmung unter Zuhilfenahme einer Euler-Lagrange Betrachtungsweise, d.h. alle akustischen Größen wurden als Funktion der Partikelverschiebung beschrieben. Allerdings galt seine Formulierung nur für reibungsfreie isentrope Strömungen mit kleinen Störungen ohne jegliche Quellterme.

In der vorliegenden Arbeit werden große Störungen und Quellen infolge von Volumenkräften betrachtet. Durch Vereinfachung der neuartigen Formulierung gelangt man zu der bekannten Galbrun-Gleichung. Basis der Erweiterung bilden die Ausführungen von Minotti u.a. [4] und Brazier [2]. Erfolgreiche Behandlungen der Galbrun-Gleichung finden sich in Bonnet-Ben Dhia u.a. [1], Retka u.a. [5] und Treysse u.a. [6].

## Betrachtungsweise des Kontinuums

Im Folgenden werden grundlegende kontinuumsmechanische Zusammenhänge mithilfe der Abb. 1 erörtert. Eine beliebige Größe  $\Phi$ , welche ein Tensorfeld  $n$ -ter Stufe darstellt, kann demnach unterschiedlich definiert werden, wobei  $\Phi$  die Größe in der gestörten Strömung und  $\Phi_0$  die Größe in der Referenzströmung repräsentiert.

### Euler'sche Beschreibung

In der Euler'schen Betrachtung ist die Größe  $\Phi$  nicht an ein materielles Teilchen gebunden. Man betrachtet die Entwicklung von  $\Phi$  für einen speziellen Punkt im Raum. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

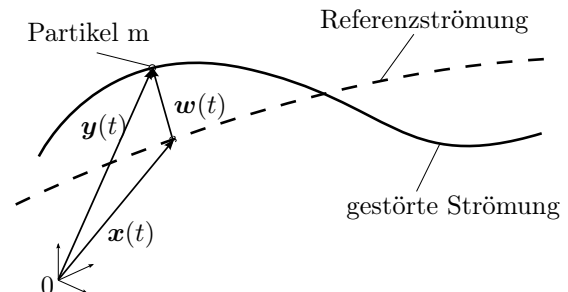


Abbildung 1: Kontinuumsmechanische Betrachtungsweise der Partikelverschiebung

$$\Phi'(\mathbf{y}, t) = \Phi(\mathbf{y}, t) - \Phi_0(\mathbf{y}, t) \quad (1)$$

$\Phi'$  beschreibt die Störung in Euler'scher Betrachtungsweise.

### Lagrange'sche Beschreibung

In der Lagrange'schen Betrachtungsweise bezieht man sich auf ein materielles Teilchen. Die Größe  $\Phi$  ist dadurch direkt an das Partikel  $m$  geknüpft. Die Lagrange'sche Störung einer Größe  $\Phi$  ergibt sich folglich zu:

$$\tilde{\Phi}(m, t) = \Phi(m, t) - \Phi_0(m, t) \quad (2)$$

wobei sich das Partikel in der Referenzströmung an einer anderen Position befindet als in der gestörten Strömung. Der Verlauf eines jeden Partikels muss dadurch bekannt sein, um das Feld der Größe  $\Phi$  zu beschreiben.

### Gemischte Formulierung

Der Grundgedanke beider Betrachtungen wird kombiniert und es ergibt sich eine neue Beschreibung der Störungen:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{y}, t) - \Phi_0(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

Die Beschreibung des Feldes der Größe  $\Phi$  erfolgt durch die Kenntnis einer Referenzströmung und einer Lagrange'schen Störung an derselben Stelle  $x$ . Die Euler'sche Störung kann schließlich mit

$$\Phi'(\mathbf{y}, t) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) - [\Phi_0(\mathbf{y}, t) - \Phi_0(\mathbf{x}, t)] \quad (4)$$

berechnet werden, wobei die Referenzströmung bekannt sein muss und der Zusammenhang zwischen  $y$  und  $x$ , d.h. die Partikelverschiebung  $w$ .

## Transformationen des Kontinuums

Eine erfolgreiche Anwendung der zuvor beschriebenen gemischten Betrachtungsweise bedarf grundlegender Trans-

formationsgesetze. Folgende Zusammenhänge gelten unter Zuhilfenahme des Nabla-Kalküls und der Koordinatenschreibweise, wobei die Einstein'sche Summationskonvention gilt:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) \quad \text{und} \quad w_i(t) = y_i(t) - x_i(t) \quad (5)$$

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{und} \quad dy_i = F_{ij} dx_j \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{w} \quad \text{und} \quad F_{ij} = \delta_{ij} + w_{i,j} \quad (7)$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{6} e_{lmn} e_{pqr} F_{lp} F_{mq} F_{nr} \quad (8)$$

$\mathbf{F}$  ist als Deformationsgradient bekannt,  $J$  als dessen Determinante,  $\delta_{ij}$  als Kronecker-Symbol,  $e_{lmn}$  als Koordinaten des Permutationstensors und  $(\cdot)_i$  als partielle Ortsableitung nach den Koordinaten  $i$ . Des Weiteren werden die Volumenelemente durch

$$dV = J dV_0 \quad (9)$$

transformiert und die Flächenelemente durch

$$d\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}_0 \quad \text{und} \quad dS_i = T_{ij} dS_{0j}, \quad (10)$$

wobei

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{J} \mathbf{T}^T \quad \text{und} \quad F_{ij}^{-1} = \frac{1}{J} T_{ji} \quad (11)$$

ist. Aus der Transformation des Kontinuums lässt sich eine weitere hilfreiche Störungsformulierung mit

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{x}, t) + (J(\mathbf{x}, t) - 1) \Phi_0(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

beschreiben, vgl. Minotti u.a.[4].

## Grundgleichungen der Fluidmechanik

Zunächst werden die Navier-Stokes-Gleichungen mithilfe der materiellen Zeitableitung

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\cdot) \quad (13)$$

betrachtet. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (14)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (15)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{\vartheta} \quad (16)$$

Diese Gleichungen beschreiben die Erhaltung von Masse, Impuls und spezifischer innerer Energie mit der Dichte  $\rho$ , dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$ , dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , dem Volumenkraftvektor  $\mathbf{f}$ , der spezifischen inneren Energie  $e$ , dem Wärmeflussvektor  $\mathbf{q}$  und Wärmequellen  $\dot{\vartheta}$ . Der Spannungstensor ist mit  $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{p} + \boldsymbol{\tau}$  gegeben, wobei  $\mathbf{p} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  und  $\boldsymbol{\tau}$  den viskosen Spannungstensor darstellen. Mithilfe der Gibbs'schen Gleichung geht die Bilanz der inneren spezifischen Energie in die Bilanz der Entropie

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} [\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{\vartheta}] \quad (17)$$

über.

## Die nichtlineare inhomogene Galbrun-Gleichung

Folgend wird ein perfektes isentropes Fluid betrachtet. Des Weiteren existieren keine Wärmeflüsse und Wärmequellen. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  verschwindet. Führt man alle vorangegangene Ausführungen des Kontinuums zusammen, ergibt sich auf Basis von Minotti u.a.[4] die nichtlineare Galbrun-Gleichung, wobei  $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{D\mathbf{w}}{Dt}$  gilt,

$$\rho_0 \frac{D^2 w_j}{Dt^2} (\delta_{jl} + w_{l,j}) = \hat{f}_j (\delta_{jl} + w_{l,j}) - J (p_0 + (J^{-\gamma} - 1) p_0)_{,l} + p_{0,j} (\delta_{jl} + w_{l,j}) \quad (18)$$

mit dem Isentropenexponent  $\gamma$ . Man erkennt in der nichtlinearen Formulierung der Jacobi Determinante  $J$  den nichtlinearen Charakter der gesamten Gleichung. Betrachtet man nur kleine Verformungen und ignoriert Terme der Größenordnung  $O(\|\nabla \mathbf{w}\|^2)$ , ergibt sich die bekannte Galbrun-Gleichung

$$\rho_0 \frac{D^2 w_j}{Dt^2} - p_{0,i} w_{j,i} + p_{0,j} w_{l,l} - (c_0^2 \rho_0 w_{k,k})_{,j} = \hat{f}_j \quad (19)$$

auf der linken Seite und ein Quellterm auf der rechten Seite in Form einer Volumenkraftstörung.

## Ausblick

Zukünftig ist geplant, die nichtlineare Galbrun-Gleichung auf beliebige Fluide zu erweitern, indem der Spannungstensor infolge viskoser Eigenschaften mit betrachtet wird. Möglichkeiten zur Lösung dieser Gleichungen bietet u.a. die Finite-Elemente-Methode und das DG-Verfahren.

## Literatur

- [1] Bonnet-Ben Dhia, A. S.; Mercier, J. F.; Millot, F.; Pernet, S.; Peynaud, E.: Time-Harmonic Acoustic Scattering in a Complex Flow: A Full Coupling Between Acoustics and Hydrodynamics. *Commun. Comput. Phys.* **11** 2 (2012), pp. 555–572
- [2] Brazier, J.-Ph.: Derivation of an exact energy balance for Galbrun equation in linear acoustics. *Journal of Sound and Vibration* **330** (2011), pp. 2848–2868
- [3] Galbrun, H.: Propagation d'une Onde Sonore dans l'Atmosphère et Théorie des Zones de Silence. Gauthier-Villars, Paris, 1931
- [4] Minotti, A.; Brazier, J.-Ph.; Simon, F.: Extension of the Eulerian-Lagrangian description to nonlinear perturbations in an arbitrary inviscid flow. *Journal of Sound and Vibration* **331** (2012), pp. 4537–4553
- [5] Retka, S.; Marburg, S.: An infinite element for the solution of Galbrun equation. *Zamm, Z. Angew. Math. Mech.* **93** 2-3 (2013), pp. 154–162
- [6] Treysse, F.; Gabard G.; Tahar, M. B.: A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (2003), pp. 705–716