

Krylov-Unterraumverfahren mit Subspace Recycling zur Beschleunigung der Fast-Multipole-Boundary-Elemente-Methode

Sören Keuchel¹, Jan Biermann², Malte Gehlken¹, Otto von Estorff¹

¹ *Hamburg University of Technology, 21073 Hamburg, Germany, Email: nub@tuhh.de*

² *BMW Group, 80788 München, Germany, Email: jan.biermann@bmw.de*

Einleitung

Die Boundary-Elemente-Methode (BEM) ermöglicht die effiziente Berechnung von akustischen Fragestellungen im Frequenzbereich. Hierbei wird für ein dreidimensionales Problem nur die Oberfläche des zu untersuchenden Objektes betrachtet, was insbesondere bei Außenraumproblemen vorteilhaft ist, da unendliche Berechnungsgebiete untersucht werden können. Ein Nachteil der BEM sind die voll besetzten, nicht symmetrischen und komplexen Systemmatrizen, welche zu einem quadratischen Lösungsaufwand bei der Verwendung von iterativen Gleichungslösern führen. Die Fast-Multipole-Methode (FMM) kann eingesetzt werden, um einen quasi-linearen Rechenaufwand zu erhalten. Die Methode beruht auf der Approximation einer Matrix-Vektor-Multiplikation und kann in einem iterativen Lösungsprozess eingesetzt werden, bei dem die explizite Berechnung der Systemmatrix nicht benötigt wird. Eine Möglichkeit zur weiteren Reduzierung des gesamten Rechenaufwands kann zu dem die Beschleunigung des iterativen Lösungsprozesses sein. Im Frequenzbereich wird zumeist eine Sequenz von linearen Gleichungssystemen $\mathbf{A}(\omega)\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{b}(\omega)$ untersucht. Weisen die einzelnen Systemmatrizen eine hohe Ähnlichkeit auf, so können Informationen aus dem vorherigen Lösungsprozess wiederverwendet werden, um die Konvergenz zu beschleunigen. Das Krylov Subspace Recycling [1] ist eine solche Vorgehensweise und wird in diesem Beitrag in Verbindung mit der Fast-Multipole-Boundary-Elemente-Methode (FMBEM) analysiert. Es werden neue Möglichkeiten zur Auswahl der wiederverwendeten Unterräume und deren Auswirkung auf den Lösungsprozess dargestellt.

Fast-Multipole-Boundary-Elemente-Methode

Die BEM beruht auf der Überführung der Helmholtz-Gleichung in die Randintegralgleichung

$$cp(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} p(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} ds_{\mathbf{y}}, \quad (1)$$

mit $c = \frac{1}{2}$ auf einem glatten Rand, dem Quellpunkt \mathbf{x} , dem Feldpunkt \mathbf{y} , dem Normalenvektor \mathbf{n} , dem Schalldruck p und dem akustischen Fluss $q(\mathbf{y}) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}$. Die Fundamentallösung für dreidimensionale akustische Fragestellungen lautet [2]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (2)$$

wobei k die Wellenzahl ist. Die Randintegralgleichung ermöglicht nach einer Diskretisierung der Oberfläche den Aufbau der Systemmatrix $\mathbf{A}(\omega)$ und des Anregungsvektors $\mathbf{b}(\omega)$. Die FMM ist ausführlich in [2] beschrieben und basiert auf der Multipole-Entwicklung der Fundamentallösung (2)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} \underbrace{e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{z}_a)\hat{\mathbf{s}}}}_{R(x, z_a, \hat{\mathbf{s}})} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^p (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|\mathbf{D}|) e^{ik\mathbf{d}\hat{\mathbf{s}}} P_l(\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{D}})}_{M_L(\mathbf{z}_b, \mathbf{z}_a, \hat{\mathbf{s}})} \underbrace{e^{ik(\mathbf{z}_b-\mathbf{y})\hat{\mathbf{s}}}}_{R(z_b, y, \hat{\mathbf{s}})} ds, \quad (3)$$

die von der Integration über die Einheitskugel S^2 und den Operatoren R und M_L abhängt. Es wird zudem eine hierarchische Baumstruktur benötigt, die eine Unterteilung des Berechnungsgebietes ermöglicht. Der Algorithmus kann daraufhin mit der Hilfe von Multipole-Momenten den Einfluss des Fernfeldes mit der FMM approximieren und so die Berechnung einer Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{A}(\omega)\mathbf{x}(\omega)$ im iterativen Gleichungslöser beschleunigen.

Krylov Subspace Recycling

Das Krylov Subspace Recycling basiert auf der Wiederverwendung gewisser Unterräume aus einem vorherigen iterativen Lösungsprozess um die Konvergenz des aktuellen Systems zu beschleunigen. Die GCR-Methode hat keine Anforderungen an den Approximationsraum U , wodurch ein flexibler Rahmen zur Übergabe des wiederzuverwendenden Unterraums gegeben ist. Die Generierung dieses Unterraums wird durch einen zweiten „Nested Solver“ ermöglicht. Es wird die Fehlergleichung $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{r}$ innerhalb des GCR mit Hilfe eines Gleichungslösers approximiert, um eine verbesserte Suchrichtung zu erhalten. Die Orthogonalität zum äußeren GCR-Zyklus wird durch die orthogonale Projektion $\tilde{\mathbf{A}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^H) \mathbf{A}$ erreicht. Dieses Verfahren wird als GCRO bezeichnet [5] und führt zu folgender Rekurrenz

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^H) \mathbf{A} \mathbf{V}_{m-k} &= \mathbf{V}_{m-k+1} \tilde{\mathbf{H}}_{m-k} \\ \mathbf{A} \mathbf{V}_{m-k} &= \mathbf{C}_k \mathbf{B}_{m-k} + \mathbf{V}_{m-k+1} \tilde{\mathbf{H}}_{m-k}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei $\mathbf{B}_{m-k} = \mathbf{C}_k^H \mathbf{A} \mathbf{V}_{m-k}$ gilt und die erweiterte Arnoldi-Beziehung definiert werden kann:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} [\mathbf{U}_k \mathbf{V}_{m-k}] &= [\mathbf{C}_k \mathbf{V}_{m-k+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{B}_{m-k} \\ 0 & \tilde{\mathbf{H}}_{m-k} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} \mathbf{W}_m &= \tilde{\mathbf{W}}_{m+1} \tilde{\mathbf{H}}_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Wahl des Unterraums $U_k \subset W_m$ definiert daraufhin die Spezialisierung des GCRO. Zwei von mehreren Möglichkeiten sind der GCRODR und GCROT [4]. Der GCRODR bestimmt die Eigenvektoren zu den kleinsten Eigenwerten und diese werden somit aus dem Spektrum des Operators entfernt. GCROT hingegen wählt die Vektoren aus, welche bei einem Restart die größte Orthogonalität bieten und verwendet zudem den Fehlervektor zwischen der aktuellen Lösung und der Anfangsschätzung. Der wiederverwendete Lösungsraum wird hierbei sukzessive erweitert und muss bei Erreichen einer maximalen Größe abgeschnitten werden (Trunkierung). Da der GCRO Algorithmus eine freie Wahl von U_k ermöglicht, wurde zudem eine Kombination beider Algorithmen untersucht. Hierbei wird der GCRODR mit zusätzlicher Integration des Fehlervektors wie im GCROT verwendet und zyklisch erneuert.

Numerisches Beispiel

Die numerische Untersuchung der Kombination von FMBEM und Krylov-Unterraumverfahren mit Subspace Recycling wird anhand einer Reifen-Rollgeräuschberechnung mit Halbraum-Formulierung [3] durchgeführt. Es wird der Frequenzbereich von 100 Hz bis 1.800 Hz mit zwei unterschiedlichen Anregungen untersucht und als Referenzlösung ein GMRES Solver eingesetzt. Zunächst wird eine Anregung mit geringer Frequenzabhängigkeit angenommen. Die benötigten Matrix-Vektor-Produkte sind in Abbildung 1 über der Frequenz aufgetragen. Der GCRODR („k10“) mit einer wiederverwendeten Lösungsraumgröße von $k = 10$ kann hierbei ab einer Frequenz von 1.000 Hz eine Verbesserung von 25 % erreichen. Der GCROT („n20“) mit einer maximalen Recyclinggröße von $n = 20$ erzielt sehr gute Ergebnisse von bis zu 70 % Beschleunigung, wobei jedoch die benötigte Trunkierung zu einer Verschlechterung im nächsten Lösungsprozess führt. Die neue Kombination („k10e03“, „k20e03“) kann ähnlich gute Ergebnisse wie der GCROT erzielen. In einer weiteren Untersuchung

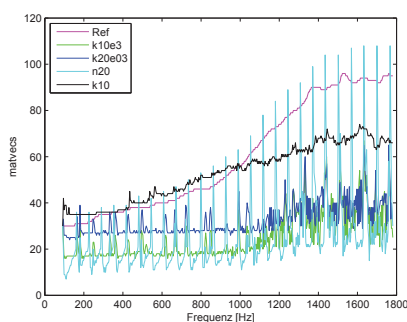


Abbildung 1: Matrix-Vektor-Produkte bei einer Anregung mit geringer Frequenzabhängigkeit

wird der Einfluss einer Anregung mit hoher Frequenzabhängigkeit analysiert. Die Resultate beruhen auf den gleichen Parametern wie bei den vorherigen Berechnungen (s. Abbildung 2). Es wird deutlich, dass der GCROT die Ergebnisse aus der vorherigen Untersuchung nicht bestätigen kann. Der GCRODR zeigt auch in dieser Un-

tersuchung ähnliche Beschleunigungen wie zuvor und die neue Kombination kann die Ergebnisse des GCRODR erzielen. Der GCROT ist somit wesentlich stärker von den Eingangsgrößen abhängig als der GCRODR, wobei die neue Kombination die Vorteile beider Verfahren vereinen kann und das jeweils bessere Ergebnis der anderen beiden Gleichungslöser erreicht.

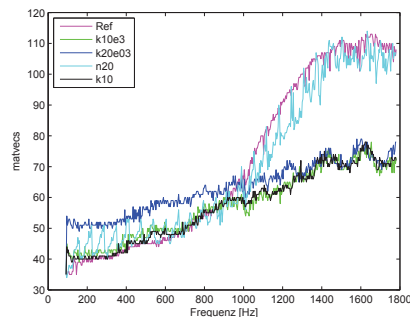


Abbildung 2: Matrix-Vektor-Produkte bei einer Anregung mit hoher Frequenzabhängigkeit

Zusammenfassung

Die Krylov-Unterraumverfahren GCRODR, GCROT und eine Kombination beider Verfahren wurden anhand von zwei Reifen-Rollgeräuschberechnungen untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die neue Kombination bei unterschiedlicher Anregung den jeweiligen Vorteil der anderen Verfahren vereint.

Die Autoren danken für die Förderung des Verbundprojektes Leiser Straßenverkehr 3 durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages.

Literatur

- [1] Biermann, J., *Effiziente Simulation von Reifenrollgeräuschen*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung, (2013).
- [2] Brunner, D., *Fast Boundary Element Methods for Large-Scale Simulations of the Vibro-Acoustic Behavior of Ship-Like Structures*, Universität Stuttgart, Institut für Angewandte und Experimentelle Mechanik, (2009).
- [3] Keuchel, S., Gehlken, M., von Estorff, O., *Halfspace Formulations for the Boundary Element Method in 3D-Acoustics Using the Fast Multipole Method*, Proceedings ICSV19, 19th International Congress on Sound and Vibration, Vilnius (Lithuania), (2012).
- [4] Parks, M., de Sturler, E., Mackey, G., Johnson, D., Spandan, M., *Recycling Krylov Subspaces for Sequences of Linear Systems*, SIAM Journal on Scientific Computing, 28 (2006), pp. 1651-1674.
- [5] de Sturler, E., *Nested Krylov Methods based on GCR*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 67 (1996), pp. 26-41.