

Frequenzabhängige Dämpfungsmodellierung und Stabilitätsverhalten in der transienten Randelemente Methode

Daniel Ernst

Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, 10587 Berlin, Deutschland, Email: ernst.daniel@gmx.de

Einleitung

Im Frequenzbereich ist die Randelemente Methode (BEM) bereits gut bekannt und ein gängiges Mittel für die Simulation akustischer Abstrahlung von Oberflächen. Die transiente Randelemente Methode (time domain boundary element method, kurz: TD-BEM) ist ein numerisches Verfahren im Zeitbereich. Es hat den Vorteil, dass nur eine Simulation für alle Frequenzen nötig, da aus einer simulierten Impulsantwort auch der Frequenzgang berechnet werden kann. Instationäre Phänomene wie z.B. Quellenbewegungen können so abgebildet werden. Desweiteren ist eine direkte Auralisation der Lösung möglich. Nachteilig ist, dass die numerische Dämpfung mit der Frequenz ansteigt. Randbedingungen sind in der Regel im Frequenzbereich formuliert und können somit nicht direkt in der TD-BEM verwendet werden. Ein weiteres Problem liegt in dem oft instabilen Verhalten.

In diesem Paper wird eine Möglichkeit gezeigt, wie die frequenzabhängige Impedanzrandbedingung in der TD-BEM umgesetzt werden kann. Außerdem werden zwei Methoden vorgestellt, um die Stabilität der TD-BEM mit geringem Rechenaufwand zu garantieren.

BEM Formulierung im Zeitbereich

Grundsätzlich wird in der TD-BEM die Kirchhoff'sche Integralgleichung

$$4\pi d(x)p(x, t) = \int_{\Gamma} \frac{q_n(y, t_r)}{r} + \frac{\partial r}{\partial n_y} \left(\frac{1}{r^2} p(y, t_r) + \frac{1}{rc} \frac{\partial}{\partial t} p(y, t_r) \right) d\Gamma_y \quad (1)$$

diskretisiert und gelöst. Mit Schallgeschwindigkeit c , Dichte ρ , Oberfläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, Zeit t , Positionsvektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$, Abstand $r := |x - y|$, retardierte Zeit $t_r := t - r/c$, Schalldruck p , Oberflächenschallfluss $q_n := -\rho \frac{\partial v_n}{\partial t}$, Oberflächennormalenvektor v_n , Quellterm Q , Oberflächennormalenvektor n_y . Bei Verwendung von konstanten Ansatzfunktionen (Ort Γ und Schnelle v), linearen Ansatzfunktionen (Schalldruck p) und einfachem Rückwärtsdifferenzenquotient ergibt sich das Gleichungssystem (siehe [1])

$$2\pi \vec{p}_i = \sum_{\mu=1}^{\mu_{max}} \mathbf{G}_{\mu} \vec{q}_{i-\mu+1} + \mathbf{H}_{\mu} (\mu \vec{p}_{i-\mu+1} - (\mu-1) \vec{p}_{i-\mu}). \quad (2)$$

Mit den quadratischen Matrizen $\mathbf{G}_{\mu}, \mathbf{H}_{\mu} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, definiert durch

$$g_{kl}^{\mu} = \int_{\Gamma_l \cap K_{\mu}^{x_k}} \frac{1}{|x_k - y|} d\Gamma_y \quad (3)$$

und

$$h_{kl}^{\mu} = \int_{\Gamma_l \cap K_{\mu}^{x_k}} \frac{\partial |x_k - y|}{\partial n} \frac{1}{|x_k - y|^2} d\Gamma_y \quad (4)$$

sowie Zeitindex i , Elementanzahl N , Schalldruckverteilung zum Zeitpunkt i \vec{p}_i , Mittelpunkt vom k -ten Element x_k , Kugelausschnitt $K_{\mu}^{x_k} := \{y \in \Gamma | (\mu-1) < \frac{|x-y|}{c\Delta t} \leq \mu\}$.

Admittanzformulierung

Im Zeitbereich kann die Admittanz mithilfe eines FIR-Filters dargestellt werden:

$$\vec{v}_i = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K a_k \vec{p}_{i-k} \quad (5)$$

Eingesetzt in Gleichung 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} -(2\pi \mathbf{I}_N + \mathbf{H}_1 + a_0 \mathbf{G}_1) \vec{p}_i &= \sum_{\mu=2}^{\mu_{max}} \mathbf{G}_{\mu} \sum_{k=0}^K a_k \frac{\vec{p}_{i-\mu+1-k} - \vec{p}_{i-\mu-k}}{\Delta t} \\ &+ \mathbf{G}_1 \sum_{k=1}^K a_k \frac{\vec{p}_{i-k} - \vec{p}_{i-1-k}}{\Delta t} - \mathbf{G}_1 \vec{p}_{i-1} \\ &+ \sum_{\mu=2}^{\mu_{max}} \mathbf{H}_{\mu} (\mu \vec{p}_{i-\mu+1} - (\mu-1) \vec{p}_{i-\mu}). \end{aligned} \quad (6)$$

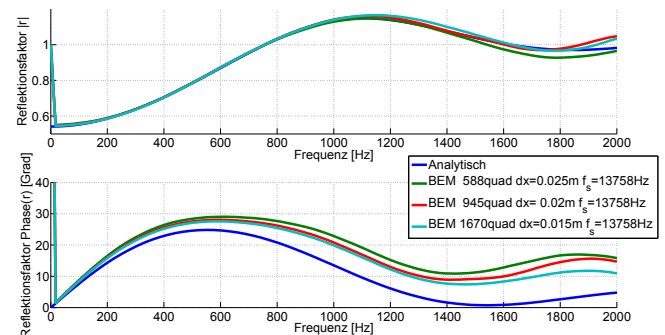


Abbildung 1: Frequenzabhängiger Impedanzansatz im Vergleich mit der analytischen Lösung im Kundt'schen Rohr.

Das Testszenario ist ein schallhartes Kundt'sches Rohr (Länge 1m, Durchmesser 10cm) mit frequenzabhängiger

Addmitanz auf der einen ($x = 0m$) und mit frequenzkonstanter Impedanz von ρc ($x = 1m$) auf der anderen Seite. Als Anregung dient eine Punktquelle bei $x = 0,9m$. Es wird die Zwei-Mikrofon-Methode simuliert, bei der die Impedanz aus dem Schalldruck an zwei Mikrofonpositionen ($x_1 = 0,2$ und $x_2 = 0,27$) bestimmt wird. In Abbildung 1 wird der vorgegebene Reflektionsfaktor $r = \frac{\frac{z}{\rho c} - 1}{\frac{z}{\rho c} + 1}$ mit dem mittels TD-BEM simulierten verglichen. Abweichungen vom Betrag des Reflektionsfaktors ergeben sich etwa ab einer Frequenz die 12 Elementen pro Wellenlänge entspricht. Da die Zeitschrittweite konstant gehalten wurde um den FIR-Filter nicht zu verändern, konvergiert die Simulation nicht an die analytische Lösung. Dies ist gut am Phasenverlauf des Reflektionsfaktors zu sehen.

Stabilitätsmechanismen

Die Rekursionsgleichung 2 oder 6 kann in die folgende Form gebracht werden [1]:

$$\begin{bmatrix} \vec{p}_{i-\mu+1} \\ \vec{p}_{i-\mu+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}_\mu & \cdots & \cdots & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \vec{p}_{i-\mu} \\ \vec{p}_{i-\mu+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{p}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Diese Formulierung kann unabhängig von dem Diskretisierungsansatz oder der Impedanzmodellierung erreicht werden. Die Matrix \mathbf{T} nennt man den Verfahrensoperator. Ist dieser diagonalisierbar, sind Stabilitätsaussagen mithilfe der Eigenvektoren \vec{v}_k und -werten λ_k sehr einfach zu treffen.

$$\vec{P}_i = \mathbf{T}\vec{P}_{i-1} = \mathbf{T}^i\vec{P}_0 = \mathbf{T}^i \sum_{k=1}^N a_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k^i \vec{v}_k \quad (8)$$

Ist ein Eigenwert λ_k vom Betrag größer als 1 und wird dieser Eigenraum angeregt ($a_k \neq 0$), ist das Verfahren instabil. Wenn der Spektralradius α von \mathbf{T} also kleiner oder gleich 1 ist, kann Stabilität garantiert werden. Ein kleiner Zeitschritt oder ein Zusammenhang zwischen Zeitschritt und Eigenfrequenzen eines Systems erzeugen jedoch häufig größere Spektralradien.

Mittels iterativer Verfahren kann der Spektralradius α auch von sehr großen, dünn-besetzten Matrizen berechnet werden. Wie leicht nachzurechnen ist, besitzt die Matrix $d\mathbf{T}$, die Eigenwerte $d\lambda_k$. Ersetzt man in \mathbf{T} M_k durch $d^k M_k$ erreicht man das selbe Resultat. Mit $d = \frac{1}{\alpha}$ kann folglich Stabilität garantiert werden. Dies wird jedoch mit einer Dämpfung aller Eigenwerte erkauft. Da die Matrix nur mit einer Konstante multipliziert werden muss, ist der Rechenaufwand linear in der Anzahl der Nichtnullinträge und damit gegenüber der eigentlichen TD-BEM vernachlässigbar.

Mithilfe der folgenden Modifikation kann auch ein einzel-

ner Eigenwert λ_k gedämpft werden:

$$\hat{\mathbf{M}}_j = \mathbf{M}_j + \frac{-\sum_{m=1}^{\mu} \mathbf{M}_m (d\lambda_k)^{\mu-m} \vec{w}_k + (d\lambda_k)^{\mu} \vec{w}_k}{\sum_{m=1}^{\mu} \vec{u}_{(\mu-m+1)}^T (d\lambda_k)^{\mu-m} \vec{w}_k} \vec{u}_{(\mu-m+1)}^T \quad (9)$$

Hierbei besteht der Vektor \vec{w}_k aus den ersten N Einträgen von \vec{v}_k und $\vec{u}^T = [\vec{u}_{(1)}^T \cdots \vec{u}_{(\mu)}^T]$ ist der zu λ_k zugehörige Linkseigenvektor. Ein Beweis hierfür ist in [2] angegeben. Der Rechenaufwand für dieses Verfahren entspricht der Berechnung von einem Zeitschritt der TD-BEM. In Abbildung 2 ist die Übertragungsfunktion von einer Punktquelle zu einer Mikrofonposition in einem Rechteckraum zu sehen. In diesem Beispiel gibt es genau einen Eigenwert der betragsmäßig größer eins ist. Eine Dämpfung aller Eigenwerte hat auch eine starke Dämpfung der Simulationsergebnisse zur Folge, dagegen bildet die ausschließliche Dämpfung des größten Eigenwertes die ersten Resonanzen im gegebenen Beispiel noch gut ab.

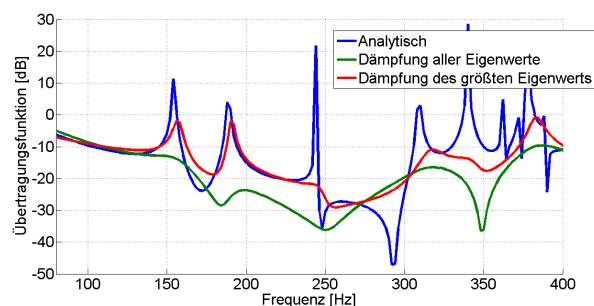


Abbildung 2: Übertragungsfunktion zwischen Punktquelle und Mikrofonposition in einem Rechteckraum. Vergleich der analytischen Lösung mit zwei Simulationen die mittels Dämpfungsmechanismen stabilisiert wurden.

Fazit

Es wurde ein Ansatz zur Modellierung von beliebigen frequenzabhängigen Impedanzen gezeigt. Einschränkend ist hier zu nennen, dass keine Impedanzen nahe null verwendet werden können und, dass der Frequenzverlauf durch einen kausalen FIR-Filter beschrieben werden kann. Weiterhin wurden zwei Dämpfungsmechanismen beschrieben. Diese garantieren Stabilität, wenn der Verfahrensoperator diagonalisierbar ist. Für die Anwendung muss nur der Spektralradius des Verfahrensoperators bekannt sein.

Literatur

- [1] Stütz, M.: Stabilitätsverhalten und Anwendungen der transienten Randelementmethode in der Akustik. PhD thesis, 2013.
- [2] Ernst, D.: Frequenzabhängige Dämpfungsmodellierung in der transienten Randelementmethode. Master thesis, 2014.