

Wellenleitung im eindimensionalen Festkörper

O. Bschorr

Aeroakustik, Stuttgart

Zusammenfassung.

Da die Cauchy'sche Kräftebilanz deviatorische Festkörperkräfte nicht erfasst, wurde diese – hypothetisch – durch eine Impulsbilanz ersetzt. Die aus dieser Hypothese resultierende Impulsgleichung $s^\circ \pm cs' = 0$ ist mit in der konventionellen Kräftegleichung $s^{\circ\circ} - c^2s'' = 0$ enthalten. Tatsächlich liefern beide Formeln für den homogenen Wellenleiter identische Planwellen und auch identisches Fernfeld bei Kugelwellen. Nicht zuletzt besteht auch Übereinstimmung bei Saiten- und Biegewellen.

Einleitung.

Die konventionelle, auf einem Kräftegleichgewicht beruhende 1. Cauchy'sche Bewegungsgleichung lieferte bei Deviationswellen nur triviale Null-Lösungen. Deswegen wurde in [1] hypothetisch die Kraftbilanz durch eine Impulsbilanz ersetzt. Aufgabe ist, das hypothetische Impulskonzept auch auf den (quasi)eindimensionalen Wellenleiter zu übertragen. Damit sollen der Wellenverlauf und die Eingangsimpedanz von unterschiedlichen 1D-Leiter bereitgestellt werden, um die Nachprüfung zu erleichtern.

Eindimensionale Wellenleitung.

Wellenleiter. Zugrunde liegt ein gerader durch die Koordinate x [m] festgelegter 1D-Longitudinalwellenleiter. Der Querschnitt $A = A(x)$ [m²], die Dichte $\rho = \rho(x)$ [kg/m³] und die Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k = c(x)$ [m/s] des Wellenleiters sind im allgemeinen Fall x -abhängig. Vorausgesetzt wird die Stetigkeit der Funktionen $(\#) = \{A, \rho, c; E, D, R, s\}$ und deren Ableitungen $(\#)' = d(\#)/dx$. Die Werte am Eingang $x = 0$ seien $(\#)_0$. Zurückgegriffen wird auch auf die redundanten Größen Elastizitätsmodul $E = \rho c^2$ [Pa] und charakteristischer Leiterdurchmesser $D \sim \sqrt{A}$ [m]. Eine in $+x$ -Richtung laufende Longitudinalwelle mit dem Ausschlag $s = s(x,t) = a \exp i(\omega t - kx)$ [m] ist durch den Amplitudenvektor $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ [m], die (Kreis)frequenz ω [rad/s] und die bei einem Verlustfaktor η [-] komplexe Wellenzahl $k = k(x) \rightarrow k(1 + i\eta) = 2\pi(1 + i)/\lambda$ [rad/m] festgelegt. (λ [m] = Wellenlänge, $i = \sqrt{-1}$)

Wellenkrümmung. Kugel-Koordinate. Beim Wellenleiter mit $A = \text{const}$ besteht eine plane Wellenfront mit dem Krümmungsradius $R \rightarrow \infty$ [m]. Im allgemeinen Fall mit $A \neq \text{const}$ hat der Amplitudenvektor $\mathbf{a} = a\mathbf{t}$ eine Winkelablage gegenüber der x -Achse. Nach der Gauß-Theorie der äquidistanten (Phasen)Flächen [4, S. 218] liefert der Tangentenvektor \mathbf{t} [-] die lokale Krümmung $1/R = 1/R(x)$ [1/m] der Wellenfront

$$1/R = \text{div } \mathbf{t} \quad \mathbf{t} = \mathbf{a}/a \quad (1)(2)$$

Zusätzlich ist in Fig. 1 die Krümmung $1/R$ auf die Geometrie des Wellenleiters zurückgeführt. Für den „schlanken“ Leiter mit $\text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2 \rightarrow 0$ und $(\#)' / (\#) \ll k$ und $D \ll \lambda/2$ kann die Näherung benützt werden:

$$1/R \approx D'/D = \frac{1}{2}A'/A \quad \text{Für } \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2 \quad (3)(4)$$

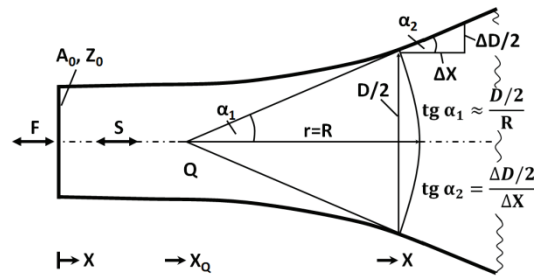


Fig. 1: Quasi-1D-Wellenleiter. An der Stelle x mit dem Durchmesser D bestehe eine Kugelwelle mit Radius R [m] und dem Zentrum Q . Mit $R \equiv r$ wird ein konzentrisches, sphärisches Koordinatensystem r [m] eingeführt. Die Forderung $\text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2$ setzt im Bereich von x bis $x + \Delta x$ eine Kugelwelle mit Zentrum in Q voraus. Mit dem Grenzübergang $\Delta D/\Delta x \rightarrow dD/dx = D'$ wird der Kugelradius $R \approx D/D'$.

Wellenleitung nach dem Impulskonzept. Während die konventionelle Bilanz auf der Kräfteinheit Newton mit der Dimension $[N = \text{mkg/s}^2]$ beruht, wird hier – hypothetisch – und die Bezeichnung der KPK-Schule Karlsruhe übernehmend der Impuls mit der Bilanzeneinheit Huygens $[Hy = \text{mkg/s}]$ herangezogen. Dazu wurde in [1] für den 3D-Leiter das tensorielle Gleichgewicht von kinetischem und potentiellm Impulsfluss aufgestellt. Beim 1D-Leiter reduziert sich die Tensor- auf eine Skalar-Gleichung und bei planer Welle mit $1/R = 0$ bilden in linearer Näherung $s^\circ \ll c$ der kinetische pcs° [Hy/sm^2] und der potentielle Impulsfluss $(Es)'$ die Bilanz $\text{pcs}^\circ -/+ (Es)' = 0$. Bei Wellenfronten mit einer lokalen Krümmung $1/R$ wird der kartesische Gradient $(Es)'$ durch den sphärischen Gradienten $(ERs)'/R$ ersetzt und die Hypothese eingeführt, dass im 1D-Leiter kinetischer Impulsfluss pcs° und potentieller Impulsfluss $(ERs)'/R$ das lokale Gleichgewicht bilden.

$$\text{pcs}^\circ -/+ (ERs)'/R = 0 \quad (5)$$

Die Vorzeichen $-/+$ kennzeichnen die positive und negative Laufrichtung der Welle. Wird der E-Modul nach $\rho c^2 = E$ und für die monofrequente Welle die Schnelle nach $s^\circ = ds/dt = i\omega s = iks/c$ [m/s] eingeführt, so kommt man auf das direkt integrierbare logarithmische Differential $\#'/\# = [ln \#]'$.

$$ik = +/- (ERs)'/R = +/- [ln (ERs)]' \quad (6)$$

Mit der Integrationskonstanten C_+ für die in $+x$ -Richtung und mit C_- für die in Gegenrichtung laufende Welle folgt aus (6) die zeitabhängige Wellengleichung (7)

$$s(x,t) = (C_+/ER) \exp i(\omega t - \varphi) + (C_-/ER) \exp i(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

Deren Vorrang entsprechend wurden für die Phasenwege eigene Symbole eingeführt. Die Phase zwischen 0 und x sei φ [rad] und die bis zum Leiterende bei $x = L$ [m] sei Φ [rad]

$$\varphi := \varphi(x) = \int_0^x k dx \quad \Phi = \int_0^L k dx \quad (8)(9)$$

Bei einer Diskontinuität an der Stelle $x = L$ kommt es zu einer Reflexion und der Überlagerung $s = s_+ + s_-$ von hin- s_+ und

rücklaufender s. Welle. Haben beide Wellen bei $x = L$ die Ausschläge $s_+(L)$ und $s_-(L)$ so bestimmt das Verhältnis Θ [rad] zusammen mit Φ die Amplitude C der reflektierten Welle. Spezielle Fälle sind das verlustfreie, „schallweiche“ Ende mit $\Theta = 0$ und das verlustfreie, „schallharte“ Ende mit $\Theta = \pi$.

$$\exp i\Theta = s_+(L)/s_-(L) \quad C = C_+ \exp i(2\Phi + \Theta) \quad (10)(11)$$

Die beiden Laufwellen mit der Amplituden-Relation (10) und mit der auch für komplexe Phasen γ gültigen Beziehung $\cos \gamma = \frac{1}{2}(\exp i\gamma + \exp -i\gamma)$ addiert, ergibt das stehende Wellenfeld (12). Bei schallweichem Ende $\Theta = 0$ erfährt die Erregerkraft $F = E_0 A_0 (s')_0$ [N] die Impedanz $Z_0 = F/(s')_0$ [kg/s] (13)

$$s(x,t) = 2 (C_+/E) [\cos(\Phi + \Theta/2 - \varphi)] \exp i(\omega t - \Phi - \Theta/2) \quad (12)$$

$$Z_0 = \rho_0 c_0 A_0 \operatorname{tg} i\Phi \quad (13)$$

Bei $\operatorname{Re}\{\Phi\} = \pi/2 = \Phi_R$ erkennt man im Impedanz-Maximum Z_R die 1. Resonanz und bei $\operatorname{Re}\{\Phi\} = \Phi_A = \pi$ das Minimum Z_A der 1. Anti-Resonanz. Beim Leiter mit kleinem Verlustfaktor η liefert die Näherung $\operatorname{tg} \eta\Phi \approx \eta\Phi$ die resistiven Impedanzen

$$Z_R \approx \rho_0 c_0 A_0 (2/\pi\eta) \quad Z_A \approx \rho_0 c_0 A_0 (\pi\eta) \quad (14)(15)$$

Beim homogenen Leiter mit $k = \text{const}$ ist $\Phi = \int_0^L k dx = kL$. Bei Resonanz mit $\Phi_R = \pi/2$ besteht mit $L = \lambda/4$ der bekannte $\lambda/4$ -Schwinger und bei Anti-Resonanz ein $\lambda/2$ -Schwinger. – Kurze Leiter mit $L \ll \lambda$ haben die Näherung $\operatorname{tg} i\Phi = \operatorname{tg} ikL \approx ikL$ und damit die rein imaginäre Impedanz $Z_0 \approx i\omega\rho_0 A_0 L$ und entspricht der Reaktanz der Leitermasse $\rho_0 A_0 L$.

Sowohl theoretisch als auch experimentell ist der Krümmungsradius R der Wellenfront schwieriger zu erfassen. Für eine Nachprüfung wird deshalb auf die Planwelle mit $1/R = 0$ und auf Kugelwellen mit $R = x$ eingeschränkt. Auch bei Saiten- und Biegewellen ist die Krümmung nicht relevant.

Zylindrischer Wellenleiter.

Bei einem 1D-Leiter mit konstantem Querschnitt $A = \text{const}$ besteht eine Planwelle und bei homogenem Medium $\rho, c = \text{const}$ reduziert sich das allgemeine Impuls- Gleichgewicht (5) auf (16) und die einfache Integration liefert die Laufwelle (17)

$$s^\circ -/+ cs' = 0 \quad \rightarrow s = s_0 \exp i(\omega t -/+ kx) \quad (16)(17)$$

Die Eingangs-Impedanz $Z_0 = F/(s')_0$ mit der Erregerkraft $F = A_0 E_0 (s')_0$ [N] kann auch direkt aus (16) abgeleitet werden

$$Z_0 = E_0 A_0 / c_0 = \rho_0 c_0 A_0 \quad (18)$$

Demgegenüber lautet für diesen Leitertyp das klassische Cauchy'schen Kräftegleichgewicht: $s^\circ - c^2 s'' = 0$. Während bei der Kräftebilanz die Beschleunigung $s^\circ = d^2 s / dt^2$ [m/s²] eingeht, ist für den Impuls die Geschwindigkeit $s^\circ = ds/dt$ ausreichend. Dasselbe gilt für die räumliche Differentiation. Trotz der Unterschiede $s^\circ \leftrightarrow s^\circ$ und $s' \leftrightarrow s''$ liefern beide Formeln identischen Wellenverlauf und identische Impedanz.

Konischer Wellenleiter.

Beim konischen Wellenleiter mit der Schallquelle und dem Koordinaten-Ursprung in der Kegelspitze besteht eine Kugelwelle mit einem Krümmungsradius R gleich dem Quellabstand $x = R$. Damit lässt sich direkt das Impulsleichgewicht (19) und die Wellengleichung (20) anschreiben

$$s^\circ -/+ c(sx)' / x = 0 \quad \rightarrow s = (C/x) \exp i(\omega t -/+ kx) \quad (19)(20)$$

Das Kräftekonzept (21) verwendet zusätzlich das Geschwindigkeitspotential $s^\circ = - \operatorname{grad} S$ und hat die Lösung (23):

$$(xs)^\circ - c^2 (xS)'' = 0 \quad \operatorname{grad} S = - s^\circ \quad (21)(22)$$

$$s = C(1/x + i/kx^2) \exp i(\omega t -/+ kx) \quad (23)$$

Im Fernfeldterm C/x stimmen beide Lösungen (20) und (23) überein. Im Nahfeld jedoch besteht die Differenz iC/kx^2 .

Spezielle 1D-Wellenleiter

Saitenwelle. Bei einer Saitenschwingung mit dem transversalen Ausschlag s stellt der Term $Apc s^\circ$ [H/s] den kinetischen und der Term $(Ps)'$ [H/s] den potentiellen Impulsfluss dar und bilden das Gleichgewicht (24). Bei konstantem Horizontalzug P [N] erhält man die bekannte Gleichung für die Saitengeschwindigkeit $c_s = \sqrt{P/\rho A}$.

$$Apc s^\circ -/+ (Ps)' = 0 \quad c_s = \sqrt{P/\rho A}. \quad (24)(25)$$

Biegewelle. Beim Biegewellenleiter lautet die Impulsbilanz (26) und liefert bei Homogenität mit $A, \rho, E, J = \text{const}$ die bekannte Biegewellengeschwindigkeit c_B (27)

$$Apc s^\circ -/+ (EJs'')' = 0 \quad c_B = \sqrt{\omega^2 EJ / Ap} \quad (26)(27)$$

Cochlea-Wellenleiter. Ausgegangen wird von dem vereinfachten Leiter-Modell nach [2,3] mit konstantem Querschnitt A , konstanter Dichte ρ und der orts- und frequenzabhängigen Wellengeschwindigkeit $c=c(x,\omega)$

$$c = \sqrt{[(\Omega^2 - \omega^2 + i\eta\Omega\omega)F]} \quad \Omega = \Omega_{\text{Max}} \exp hx \quad (28)(29)$$

Die innerhalb des Hörbereichs von Ω_{Min} bis Ω_{Max} [rad/s] liegenden Eigenfrequenzen $\Omega = \Omega(x)$ der Basilmembran BM sind gemäß (29) logarithmisch über die BM-Länge L verteilt. Der Parameter $F \approx HA/B$ [m²] enthält Breite B , Höhe H von BM und die Leiterfläche A . Gefragt ist die Eingangsimpedanz Z_0 am ovalen Fenster OF bei $x = 0$. Dazu wird auf $F = \text{const}$ vereinfacht, der BM-Verlustfaktor η vernachlässigt und die Resonanzsingularität bei $\Omega = \omega$ mit $c \rightarrow 0$ als ein freies Ende an der Stelle $x_\Omega \leftrightarrow L$ interpretiert. Das so vereinfachte Modell mit $k = \omega/c$ elementar integriert, hat den Phasenweg Φ

$$\Phi = \int_0^{x_\Omega} k dx = \pi/2 h \sqrt{F} - (\operatorname{arc} \sin \omega / \Omega_{\text{Max}}) / h \sqrt{F} \quad (30)$$

Nicht nur aus Platzgründen wird angenommen, dass die Evolution den ω -abhängigen, 2. Term unterdrückt, den rein leiter-spezifischen 1. Parameter $h\sqrt{F}$ [-] vorzieht und dass dieser via aktiver Cochlea verstellbar ist. So gewährleistet die Einstellung $(h\sqrt{F})_R = 1$ das Phasenintegral $\Phi = \pi/2 \rightarrow \Phi_R$ und nach (14) am OF das resonante Impedanz-Maximum $Z_R \sim 2/\pi\eta$. Das anti-resonante Minimum $Z_A \sim \pi\eta$ liegt bei der Einstellung $(h\sqrt{F})_A = 0,5$. Eine aktive Verstellung des Parameters $h\sqrt{F}$ um den Faktor 2 reicht so aus, um simultan über den gesamten Hörbereich $\Omega_{\text{Min}} < \omega < \Omega_{\text{Max}}$ eine Dynamik $Z_R/Z_A = 2/(\pi\eta)^2$ zu generieren. Bei einem durch die aktive Cochlea eingestellten Verlustfaktor $\eta \rightarrow \eta_{\text{akt}} = 0,001$ bestreitet ein solcher Effekt fast die Hälfte der 120 dB-Gehördynamik.

Quellen.

- [1,2,3] O. Bschorr: DAGA. Fortschritte Akustik. [1] DAGA '14 S. 80; [2] DAGA '14 S. 411. [3] DAGA '13 S. 172
[4] M. Lagally, W. Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung. Akad. Verlagsgesellschaft. Leipzig (1964).