

Die Fuzzy-EFEM zur Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten bei hochfrequentem Körperschall

Bernd Stritzelberger, Alexander Yefremov, Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung

21073 Hamburg, Deutschland, E-Mail: *mub@tuhh.de*

Einleitung

Numerische Simulationen sind ein wichtiger Bestandteil bei der Untersuchung dynamischer Eigenschaften von vibro-akustischen Systemen. Mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) oder der Boundary-Elemente-Methode (BEM) existieren dabei etablierte Verfahren, die jedoch im Rahmen einer hochfrequenten Analyse großer Strukturen eine effiziente Berechnung aufgrund der enormen Anzahl von Freiheitsgraden stark erschweren. Soll im Entwurfsprozess zudem eine Parametervariation im Sinne einer Optimierung oder für eine Abschätzung des Konfidenzintervalls bei Parameterunsicherheiten betrachtet werden, ist die Anwendung der klassischen Methoden nahezu unmöglich.

Eine alternative, energiebasierte Methode für die Vorhersage dynamischer Eigenschaften stellt die Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM) dar. Als Freiheitsgrade werden räumlich und zeitlich gemittelte Energiedichten über eine wellenbasierte Energieflussgleichung bestimmt. Die Lösung erlaubt ein grobes Rechengitter, unabhängig von der Frequenz. Die Methode zeigt damit das Potenzial, auch im hohen Frequenzbereich und bei gleichbleibendem Ressourcenaufwand große Strukturen effizient berechnen zu können.

Die Fuzzy-EFEM wird als eine Weiterentwicklung der EFEM vorgestellt. Hierbei ist die Fuzzy-Arithmetik zur Beschreibung von Parametervariationen direkt in die klassische Matrixformulierung integriert. Über eine Einzelrechnung mit vertretbarem Mehraufwand können so die Einflüsse von unsicheren Parametern auf das Ergebnis ermittelt werden.

Theoretische Grundlagen

Ausgehend von der stationären Energieerhaltung lässt sich mit einer Analogie zur Wärmeleitung und bei Zeitmittelung die der EFEM zugrundeliegende Energieflussgleichung

$$\langle \pi_{in} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{e} \rangle + \omega\eta \langle \bar{e} \rangle \quad (1)$$

für die Betrachtung ebener Wellen herleiten [1]. Dabei ist $\langle \pi_{in} \rangle$ die zeitlich gemittelte Eingangsleistung der Anregung und $\langle \bar{e} \rangle$ die zeitlich und lokal räumlich gemittelte Energiedichte als Zustandsvariable für die hochfrequente dynamische Analyse bei der Kreisfrequenz ω . Zusätzlich zur Strukturdämpfung η sind alle Material- bzw. charakteristischen Geometrieparameter in der Gruppengeschwindigkeit c_g zusammengefasst. Tabelle 1 zeigt die

Abhängigkeiten für die drei Wellenarten in Platten nach der Kirchhoff-Theorie. Während die Wellen in der Plattenebene ausschließlich durch das Material charakterisiert sind (Elastizitätsmodul E , Dichte ρ , Poissonzahl ν), zeigen die dispersiven BiegeWellen zudem auch eine Abhängigkeit von der Plattendicke h . Unter Anwendung der Finite-Elemente-Methode lässt sich Gl. (1) in Matrixschreibweise formulieren und im diskretisierten Raum lösen.

Tabelle 1: Gruppengeschwindigkeiten Kirchhoff-Platte

Longitudinalwelle	$c_{gL} = \sqrt{E/(\rho(1-\nu^2))}$
Scherwelle	$c_{gS} = \sqrt{E/(2\rho(1+\nu))}$
BiegeWelle	$c_{gB} = 2\sqrt{\omega^2 E h^2 / (12\rho(1-\nu^2))}$

Bei der Behandlung von Parameterunsicherheiten bietet die Fuzzy-Arithmetik [2] im Gegensatz zu probabilistischen Methoden die Möglichkeit, mehrere variable Größen gezielt zu kombinieren. Weil dabei keine Kenntnisse über die statistischen Verteilungsfunktionen nötig sind, lassen sich zudem unvollständige und subjektive Informationen in die Berechnungen einbeziehen [2].

Als Fuzzyzahl \tilde{P} ist dabei eine konvexe Menge mit einer zumindest stückweise stetigen Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{\tilde{P}}(x) \in [0; 1]$ und genau einem $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_{\tilde{P}} = 1$ am Modalwert \bar{x} definiert. Abbildung 1 zeigt eine beispielhafte dreieckförmige Fuzzyzahl mit linearen Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\tilde{P},l}$ bzw. $\mu_{\tilde{P},r}$ für die Bereiche links bzw. rechts des Modalwerts. Die Verknüpfung \circ mit $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ mehrerer Fuzzyzahlen ist nicht trivial und erfolgt auf Basis gleicher Zugehörigkeitswerte. Werden beispielhaft die Zahlen \tilde{A} und \tilde{B} verknüpft, so gehören zu einem bestimmten Zugehörigkeitswert μ^* die Werte x_A^* bzw. x_B^* und es folgt als Ergebnis bei μ^*

$$z^* = x_A^* \circ x_B^* = \mu_A^{-1}(\mu^*) \circ \mu_B^{-1}(\mu^*) \quad (2)$$

mit μ^{-1} als Umkehrfunktion von $\mu(x)$.

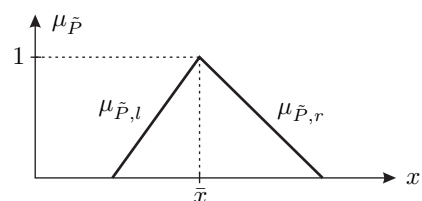


Abbildung 1: Beispielhafte Fuzzyzahl \tilde{P}

Fuzzy-EFEM ungekoppelter Systeme

Bei der Betrachtung von Parameterunsicherheiten in der EFEM lässt sich die Analyse auf die als unsicher definierten Gruppengeschwindigkeiten \tilde{c}_g in Form von Fuzzyzahlen reduzieren. Gemäß Tabelle 1 sind die Einflüsse einzelner Parameter beliebig zu integrieren. Mit der Zusammenfassung der Unsicherheiten in \tilde{u} und

$$\tilde{c}_g^2 = (1 - \tilde{u})\tilde{c}_g^2 \quad (3)$$

kann die EFEM-Systemgleichung in einer unsicheren Formulierung für koppelfreie Strukturen als

$$((1 - \tilde{u}) \cdot \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s) \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{f} \quad (4)$$

geschrieben werden. Dabei ist analog zur rechten Seite von Gl. (1) \mathbf{K}_u der Teil der Systemmatrix, welcher von der Gruppengeschwindigkeit abhängt, während \mathbf{K}_s nicht mit Unsicherheiten behaftet ist. Der Vektor $\tilde{\mathbf{e}}$ beinhaltet die unbekanntenen Freiheitsgrade (FHG), d.h. Energiedichten der einzelnen Wellenarten an den Knoten des Rechnetzes, und analog der Vektor \mathbf{f} die Anregung. Die Lösung von Gl. (4) kann mithilfe einer Inversenentwicklung zu [3]

$$\tilde{\mathbf{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{K}_u \tilde{u} \right]^n (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{f} \quad (5)$$

formuliert werden, falls $\left\| (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{K}_u u \right\| < 1 \forall u \in \text{supp}(\tilde{u})$. Jeder FHG wird ebenfalls als Fuzzyzahl beschrieben. Für eine Näherungslösung N -ter Ordnung nach Abbruch beim N -ten Reihenglied sind folglich $N+1$ Gleichungslösungen nötig, wobei für $N=0$ das Ergebnis einer Standardrechnung bei den Modalwerten und ohne die Berücksichtigung von Unsicherheiten resultiert. Aus einer Fehlerabschätzung folgt, dass für den Normfehler der Approximation N -ter Ordnung

$$E_N \leq \frac{\left\| \left[(\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{K}_u \right]^{N+1} (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{f} \right\| \hat{u}^{N+1}}{1 - \left\| (\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{K}_u \right\| \hat{u}} \quad (6)$$

mit $\hat{u} := \sup(|u|)$ gilt [3].

Der Umgang mit Fuzzyzahlen gemäß Gl. (2) lässt sich besonders effektiv durch die Definition der Umkehrfunktionen in Form von Polynomen gestalten. Aus

$$\mu_{\tilde{u}_a}^{-1}(\mu) = \begin{cases} \mu_{\tilde{u}_a,l}^{-1}(\mu) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i^l \mu^i \\ \mu_{\tilde{u}_a,r}^{-1}(\mu) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i^r \mu^i \end{cases} \quad (7)$$

mit $n_a \in \mathbb{N}$, $a_i^l, a_i^r \in \mathbb{R} \forall i$ und $\mu \in [0, 1]$ kann \tilde{u}_a als Matrix mit der Gestalt

$$M_{\tilde{u}_a} = \begin{pmatrix} a_0^l & a_0^r & h_{\tilde{u}_a} \\ a_1^l & a_1^r & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_a}^l & a_{n_a}^r & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

dargestellt werden [3]. Mit $h_{\tilde{u}_a}$ ist ein History-Index eingeführt, der die Vertauschung der Grenzen bei Operationen mit Fuzzyzahlen verfolgt und es so zusammen mit speziellen Verknüpfungen erlaubt, eine Überschätzung bei der Verknüpfung identischer Fuzzyzahlen zu vermeiden [3].

Als numerisches Beispiel wird eine quadratische Platte betrachtet. Für eine dimensionslose Analyse werden normierte Parameter ($\bar{h}=E=\eta=\omega=\tilde{c}_{gB}=1$, $\nu=0$) angenommen. Die Anregung erfolgt punktförmig in der Plattenmitte bei einer Einheitsleistung und reiner Biegebeanspruchung. Die Plattendicke wird als unsicherer Parameter mit $h \in [0, 5\bar{h}; 1, 5\bar{h}]$ und linearen $\mu_{\tilde{h},l}$ und $\mu_{\tilde{h},r}$ definiert. Abbildung 2 veranschaulicht die Fuzzyzahl \tilde{h} , sowie daraus resultierend \tilde{c}_{gB} . Durch gezielte Variation und mehrfache Einzelrechnungen bei diskreten Werten für μ kann mithilfe der Standard-EFEM eine Referenzlösung erzeugt werden. Die Ergebnisse für die Energiedichte der Biegewellen am Anregungspunkt und an einer Ecke der Platte sind in Abbildung 3 in der Darstellung einer Fuzzyzahl gezeigt.

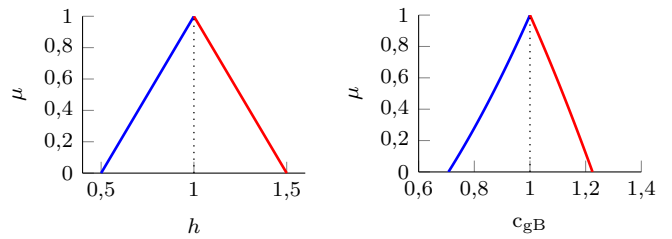


Abbildung 2: Unsichere Parameter \tilde{h} und \tilde{c}_{gB} (Input)

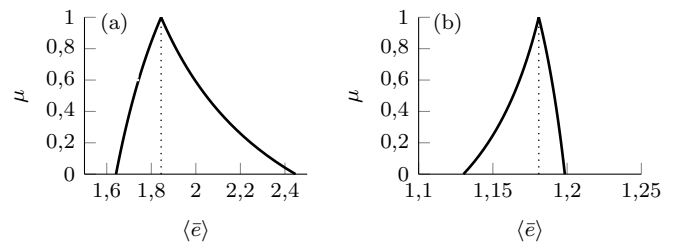


Abbildung 3: Referenzlösung in (a) Anregungspunkt (Mittelpunkt), (b) Ecke der Platte

Die maximal zulässige Unsicherheit für die Inversenentwicklung aus Gl. (5) ergibt für das vorliegende Beispiel eine sehr große mögliche Schwankungsbreite $u \in [-0,978; 0,978]$. Die hier untersuchte Streuung von h liegt damit im Gültigkeitsbereich der Fuzzy-EFEM. Wird eine solche Rechnung durchgeführt, resultieren die in Abbildung 4 dargestellten Ergebnisse für verschiedene Ordnungen N . Die analog zu Abbildung 2 gewählte Farbcodierung kennzeichnet die Verbindung zwischen Input und Lösung. Für $N=0$ wird ausschließlich der Modalwert der Energiedichte auf der Platte ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten in der Plattendicke berechnet. Für höhere Ordnungen ergibt sich eine Fuzzyzahl als Lösung, die sich mit steigendem N immer weiter der Referenzlösung

annähert. Der nichtlineare Einfluss von h bzw. c_{gB} auf (\bar{e}) wird über die veränderte Form im Vergleich zum Input deutlich. Des Weiteren kann festgestellt werden, dass sich eine Änderung in h mit unterschiedlichem Vorzeichen auf die resultierende Energiedichte in den beiden ausgewählten Punkten auswirkt. Über den Zugehörigkeitswert lässt sich ein direkter Bezug zwischen den beiden Größen herstellen.

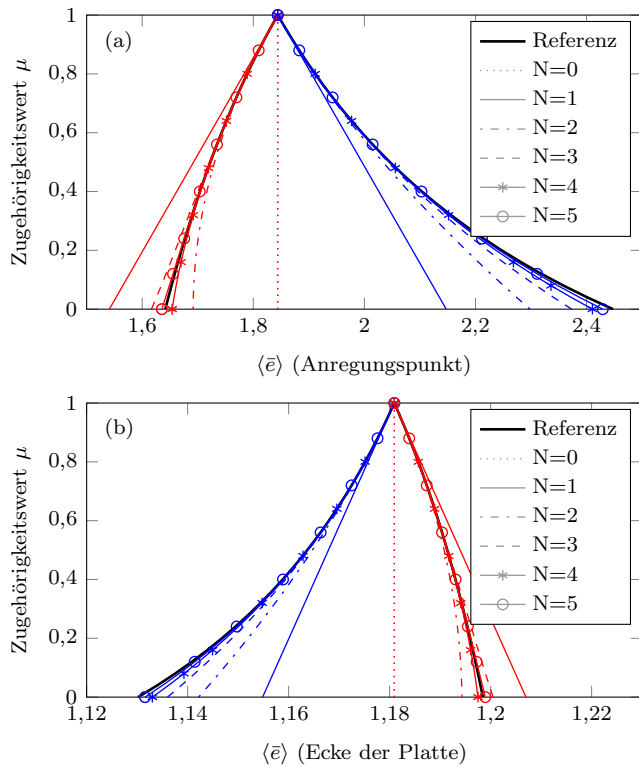


Abbildung 4: Referenzlösung und Ergebnis der Fuzzy-EFEM in (a) Anregungspunkt (Mittelpunkt), (b) Ecke der Platte

Exemplarisch für die Lösung 1. und 2. Ordnung sind in Abbildung 5 die relativen Fehler über die Freiheitsgrade der untersuchten Platte aufgetragen. Die maximale Abweichung der Fuzzy-EFEM zur Referenzlösung ergibt sich für $\mu=0$. Die dargestellten Fehler sind auf die jeweiligen Lösungen beim Modalwert mit $\mu=1$ bezogen. Die lokal größten Abweichungen resultieren am Anregungspunkt in der Plattenmitte. Für die Ergebnisse links des Modalwerts (l) und entsprechend niedrigerer Energiedichte lässt sich ein grundsätzlich geringerer relativer Normfehler (Norm des Fehlervektors bezogen auf Norm des Ergebnisvektors beim Modalwert) gegenüber den Ergebnissen rechts des Modalwerts (r) feststellen. Für alle Ordnungen liefert die Fehlerabschätzung aus Gl. (6), ebenfalls bezogen auf die Norm der Modallösung, sehr gute Resultate für den maximal zu erwartenden Normfehler. Tabelle 2 fasst die Ergebnisse der Fehlerbetrachtung mit einer Genauigkeit von drei Dezimalstellen zusammen. Für das untersuchte Beispiel folgt eine nahezu lineare Abhängigkeit der Fehler von N .

Die Analyse von Gl. (6) veranschaulicht, dass die Fehler durch die Approximation N -ter Ordnung mit der

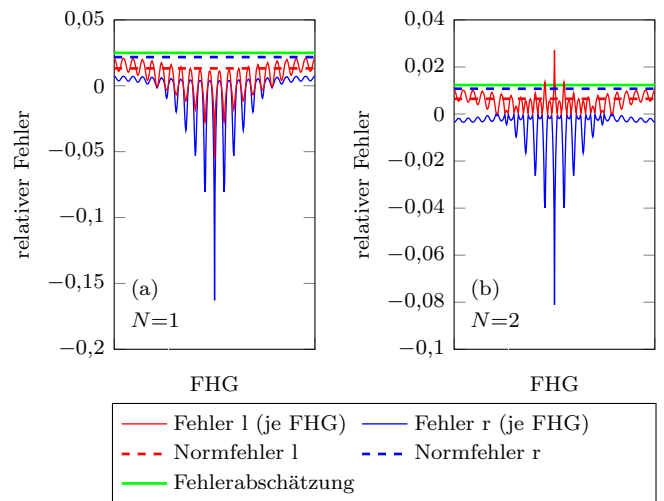


Abbildung 5: Relative Fehler der Inversenentwicklung über Platte (a) $N=1$, (b) $N=2$

Tabelle 2: Absolute relative Fehler der Inversenentwicklung

	Ordnung N				
	1	2	3	4	5
max. Fehler l	0.055	0.027	0.014	0.007	0.003
max. Fehler r	0.163	0.081	0.040	0.020	0.010
Normfehler l	0.013	0.006	0.003	0.002	0.001
Normfehler r	0.022	0.011	0.005	0.003	0.001
Fehlerabsch.	0.025	0.012	0.006	0.003	0.001

Schwankungsbreite der unsicheren Parameter steigt bzw. mit N sinkt. In der Konsequenz sind bei geringen Unsicherheiten also auch niedrige Lösungsordnungen erlaubt. Des Weiteren sind die Geometrie-, Material- und Analyseparameter in \mathbf{K}_u und \mathbf{K}_s von Bedeutung. Untersuchungen mit realistischen Parameterwerten für Stahlplatten führten auf ein analoges Verhalten wie in den Abbildungen 4 und 5 gezeigt. Allerdings konnten hierbei deutlich geringere relative Fehler als bei der normierten Analyse festgestellt werden.

Der Fehler bzw. die nötige Ordnung für die Inversenentwicklung der Fuzzy-EFEM ist unabhängig von der Form der Fuzzyzahlen bei der Darstellung von unsicheren Eingangsgrößen. Zur Veranschaulichung ist für eine erneute Berechnung analog zu Abbildung 2 eine pseudogaußförmige Verteilungsfunktion der Plattendicke angenommen, d.h. $h \in [0, 5\bar{h}; 1, 5\bar{h}] = [\bar{h} - 3\sigma; \bar{h} + 3\sigma]$. Das Ergebnis der unsicheren Energiedichte am Anregungspunkt ist in Abbildung 6 gezeigt. Die Möglichkeit unterschiedliche Verteilungsfunktionen für die Berechnung zu verwenden erlaubt eine gezielte Steuerung einzelner Parameterkombinationen, wenn mehrere Unsicherheiten miteinander verknüpft werden.

Fuzzy-EFEM gekoppelter Systeme

Der wellenbasierte Charakter der EFEM erfordert eine spezielle Kopplungsformulierung mit zusätzlichen Kopplungselementen, welche die Abbildung von Unstetigkeiten in der Energiedichteverteilung einzelner Wellen-

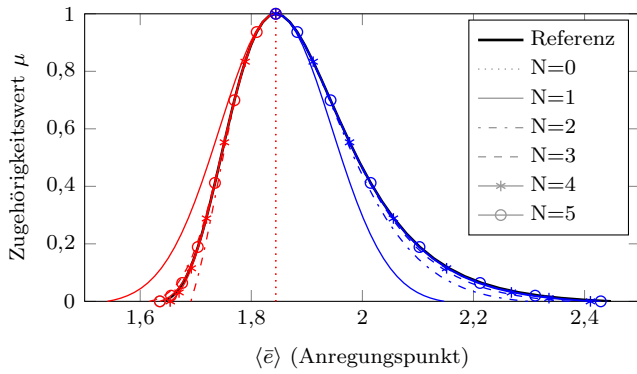


Abbildung 6: Referenzlösung und Ergebnis der Fuzzy-EFEM in Anregungspunkt (Pseudo-Gauß als Input)

arten ermöglichen [1]. Die Leistungsübertragung zwischen Strukturelementen und/oder Wellenarten wird dabei durch Transmissionskoeffizienten τ beschrieben, die in der Matrix \mathbf{T} zusammengefasst werden können. Im Falle von einfachen Linienkopplungen existieren hierfür analytische Lösungen [4]. Die Verbindungsmatrix

$$\mathbf{J} = (\mathbf{I} - \mathbf{T}) (\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1} \mathbf{C} \quad (9)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} und \mathbf{C} einer Diagonalmatrix, die bei Linienkopplungen mit den unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten besetzt ist, wird in angepasster Form in eine Kopplungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathbf{c},\mathbf{u}}$ überführt. Für Systemmatrizen in Blockschreibweise und sortiert nach Strukturelement i und Wellentyp j lassen sich die k Unsicherheiten gemäß

$$\tilde{c}_{g,ij} = (1 - \tilde{u}_{ij}) \bar{c}_{g,ij} \quad (10)$$

in der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ zusammenfassen. Wird angenommen, dass \mathbf{T} unabhängig von einer Änderung in $c_{g,ij}$ ist, so folgt analog zu Gl. (4) eine unsichere Formulierung für gekoppelte Strukturen zu [3]

$$\left(\mathbf{K}_{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}})^2 + \mathbf{K}_{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_{\mathbf{c},\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}) \right) \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{f}. \quad (11)$$

Die Lösung von Gl. (11) mittels Inversenentwicklung führt auf eine Matrixformulierung [3], die nicht mit herkömmlichen Lösungsmethoden bestimmt werden kann, da mit $\tilde{\mathbf{U}}$ die Unsicherheiten in der Darstellung als Fuzzyzahlen explizit bei der Gleichungslösung zu berücksichtigen sind. Unter Vernachlässigung von $\tilde{\mathbf{U}}^2$ lässt sich mit der gekoppelten Systemmatrix einer Standard-EFEM ohne Unsicherheiten $\mathbf{K}_{\text{sys}} = \mathbf{K}_{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_{\mathbf{c},\mathbf{u}}$ eine Näherungslösung

$$\tilde{\mathbf{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{K}_{\text{sys}}^{-1} (2\mathbf{K}_{\mathbf{u}} + p\mathbf{K}_{\mathbf{c},\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{U}} \right]^n \mathbf{K}_{\text{sys}}^{-1} \mathbf{f}, \quad (12)$$

falls $\left\| \mathbf{K}_{\text{sys}}^{-1} (2\mathbf{K}_{\mathbf{u}} + p\mathbf{K}_{\mathbf{c},\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{U}} \right\| < 1$, bestimmen [3], die, wie auch bei Gl. (4), eine getrennte Berechnung über Gleichungslösung und anschließende Auswertung mit der Fuzzy-Arithmetik ermöglicht. Mit p ist ein Faktor eingeführt, der zur Berücksichtigung von Unsicherheiten in

\mathbf{T} herangezogen werden kann. Wird angenommen, dass sich die Transmissionskoeffizienten im betrachteten Bereich von $\tilde{c}_{g,ij}$ nicht verändern, gilt $p=1$, bei einer linearen Abhängigkeit $p=2$. Durch die Kopplung wird im Allgemeinen das gesamte System durch jede eingeführte Unsicherheit beeinflusst. Im Vergleich zum ungekoppelten System steigt der numerische Aufwand für $N=1$ um $(k-1)$ Gleichungslösungen an. Eine Entwicklung höherer Ordnung ist aufgrund der eingeführten Vernachlässigung von $\tilde{\mathbf{U}}^2$ zur Darstellung gemäß Gl. (12) nicht sinnvoll.

Durch die getroffenen Annahmen ist die hier vorgestellte Fuzzy-EFEM für gekoppelte Systeme lediglich für die Analyse von unsicheren Parametern mit geringer Schwankungsbreite in \tilde{u} geeignet, beispielsweise in der Anwendung auf Toleranzbetrachtungen. Insbesondere die Transmissionskoeffizienten zeigen ein vielfach sensitives nichtlineares Verhalten auf die Eingangsgrößen und auch auf sekundäre Parameter, wie die Frequenz ω . Sind die einschränkenden Bedingungen erfüllt, lassen sich ähnlich gute Ergebnisse wie für die ungekoppelten Systeme erzielen.

Zusammenfassung

Die EFEM als Energiemethode zur Berechnung hochfrequenten Körperschalls ist in der vorgestellten Arbeit um die Anwendung auf effiziente Analysen von Parameterunsicherheiten erweitert. Die herkömmlichen Matrixformulierungen wurden dabei mithilfe einer Inversenentwicklung für die direkte Anwendung der Fuzzy-Arithmetik auf die Systemmatrizen modifiziert. Gegenüber einer stochastischen Betrachtung mit vielen Einzelrechnungen wird durch die neue Formulierung der numerische Aufwand reduziert. Gleichzeitig wird eine gezielte Unsicherheitsanalyse mit detailliertem Einblick in die Zusammenhänge zwischen Streuung in den Eingangsparametern und resultierenden Ergebnisschwankungen ermöglicht. Für ungekoppelte Systeme lassen sich Ergebnisse sehr hoher Genauigkeit bei gleichzeitig großer zulässiger Variation der Gruppengeschwindigkeiten erzielen. Die Anwendung auf gekoppelte Systeme ist hingegen stärker eingeschränkt und insbesondere für geringe Unsicherheiten, beispielsweise bei Toleranzbetrachtungen, einzusetzen.

Literatur

- [1] Moens, I.: On the use and the validity of the energy finite element method for high frequency vibrations. Dissertation, K.U. Leuven, Belgien, 2001
- [2] Hanss, M.: Applied Fuzzy Arithmetic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005
- [3] Stritzelberger, B., Yefremov, A., Lippert, S. und von Estorff, O.: Schlussbericht des Vorhabens EPES Effiziente Prognose vibroakustischer Eigenschaften in der Schiffsentwurfsphase. Technische Universität Hamburg-Harburg, 2014
- [4] Langley, R. S. und Heron, K. H.: Elastic wave transmission through plate/beam junctions. Journal of Sound and Vibration (1990), Vol. 143, Nr. 2, 241-253