

Inversen-Reihenentwicklung zur Gleichungslösung bei der Analyse intervallbehafteter vibro-akustischer FE-Systeme

Lydia Mayer, Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Modellierung und Berechnung
21073 Hamburg, Deutschland, Email: mub@tuhh.de

Einleitung

Um mithilfe von Berechnungsverfahren sinnvolle und aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten ist es notwendig, Parameterunsicherheiten in der Berechnung zu berücksichtigen. Üblicherweise verwendete Verfahren, wie zum Beispiel das Monte-Carlo-Sampling, basieren auf der mehrfachen Auswertung desselben Modells mit unterschiedlichen Eingangsdaten. Dafür ist es jedoch zwingend erforderlich Daten über statistische Verteilungsfunktionen zu kennen. Im Gegensatz dazu ermöglicht eine Betrachtung von Intervallen eine Abschätzung von Grenzen ohne genauere Kenntnis über das statistische Verhalten der Eingangsdaten.

Im Folgenden wird eine Möglichkeit vorgestellt, ein diskretisiertes und dabei unsicherheitenbehaftetes Problem, für das mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ein Gleichungssystem gebildet wird, mit einer Inversen-Reihenentwicklung nach Neumann zu lösen. Die Parameterunsicherheiten werden dabei über Intervalle beschrieben, sodass eine Mehrfachauswertung ein- und desselben Systems sowie genaue Kenntnisse über statistisches Verhalten nicht notwendig sind.

Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden kurz die theoretischen Grundlagen erörtert. Es wird dabei zunächst auf die Intervallarithmetik sowie auf eine Inversen-Reihenentwicklung nach Neumann eingegangen. Anschließend wird das Berechnungsbeispiel kurz vorgestellt und alle notwendigen Gleichungen zur Beschreibung des unsicheren Anwendungsbeispiels mit Hilfe einer Neumann-Reihenentwicklung hergeleitet.

Grundlagen der Intervallarithmetik

Eine Teilmenge von \mathbb{R}

$$A = [a_1, a_2] = \{t | a_1 \leq t \leq a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

wird geschlossenes Intervall genannt [1]. Dabei ist a_1 das sogenannte Infimum und a_2 bezeichnet das Supremum. Alternativ ist ein Ausdruck über einen Mittelwert A_0 sowie eine Abweichung dA möglich

$$A = A_0 + [-dA, dA] \quad (2)$$

[3], [6]. Für das Rechnen mit Intervallzahlen sind ebenso wie für reelle Zahlen Rechenoperationen definiert. Weitere Informationen finden sich in [1] und [5]. Darüberhinaus

existieren Verfahren zur Lösung großer Gleichungssysteme sowie der Behandlung spärlich besetzter Gleichungssysteme [3], [6], wobei in [4] gezeigt wurde, dass diese wenig geeignet für das vorliegende Problem sind. Weiterhin entsteht aufgrund der Rechenoperationen häufig das Problem der Überschätzung des Ergebnisintervalls, da stets das größtmögliche Intervall die Lösung einer Berechnung darstellt, selbst wenn diese eigentlich gar nicht Teil der tatsächlichen Lösung ist.

Inversen-Reihenentwicklung nach Neumann

Ausgangspunkt ist die Lösung eines Problems der Form

$$\mathbf{A} \cdot x = b \quad , \quad (3)$$

wobei die Systemmatrix \mathbf{A} unsicherheitenbehaftet ist. Im Allgemeinen kann eine Inverse über eine Neumann-Reihe

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^n \quad (4)$$

für $\|\mathbf{A}\| < 1$ approximiert werden, wobei \mathbf{I} eine Einheitsmatrix ist. Zur Behandlung der Parameterunsicherheiten wird die Systemmatrix in einen konstanten Anteil \mathbf{C} und einen intervallbehafteten Teil \mathbf{D} aufgeteilt

$$(\mathbf{C} - \mathbf{D}) \cdot x = b \quad . \quad (5)$$

Eine Lösung von Gleichung (5) kann entsprechend über das Produkt aus der Inversen der Systemmatrix und der rechten Seite des Gleichungssystems $x = (\mathbf{C} - \mathbf{D})^{-1} \cdot b$ gefunden werden. Dafür ist es notwendig, die Inverse $(\mathbf{C} - \mathbf{D})^{-1}$ zu bestimmen. Wird $(\mathbf{C} - \mathbf{D})^{-1}$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1}$ multipliziert und unter Zuhilfenahme von $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1}$ und $\mathbf{C}(\mathbf{D} + \mathbf{E}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ ergibt sich

$$(\mathbf{C} - \mathbf{D})^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{D}]^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad . \quad (6)$$

Unter Anwendung der Neumann-Reihe aus Gleichung (4) ergibt sich eine Lösung zu

$$(\mathbf{C} - \mathbf{D})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{D})^n \cdot \mathbf{C}^{-1} \quad . \quad (7)$$

Anwendungsbeispiel

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Reihenentwicklung wird im Folgenden auf eine unsicherheitenbehaftete Mindlin-Platte angewandt, die diskretisiert

und mit Hilfe der FEM gelöst werden soll. Sie wird durch eine Kraft an einem Knoten mit einer bestimmten Frequenz zu Vibrationen angeregt (siehe Abbildung 1).

Aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{K}u = f \quad (8)$$

mit der Massenmatrix \mathbf{M} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , dem Verschiebungsvektor u sowie dem Kraftvektor f ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot u = f \quad (9)$$

mit der Anregungsfrequenz ω .

Sowohl die Massenmatrix als auch die Steifigkeitsmatrix können unsichere Parameter enthalten. Auf die daraus resultierenden Gleichungssysteme wird im Folgenden näher eingegangen.

Unsicherer Elastizitätsmodul

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist direkt proportional zum Elastizitätsmodul E , sodass dieser als Faktor aus der Steifigkeitsmatrix herausgelöst werden kann $\mathbf{K} = E \cdot \mathbf{K}_{mod}$. Damit wird aus Gleichung (9)

$$[E \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M}] \cdot u = f \quad (10)$$

Für einen intervallbehafteten Elastizitätsmodul $E = E_0 + \delta E = E_0 + [-dE, dE]$ ergibt sich entsprechend

$$[(E_0 + \delta E) \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M}] \cdot u = f \quad (11)$$

Gleichung (11) wird in

$$u = [(E_0 \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M}) + \Delta E \cdot \mathbf{K}_{mod}]^{-1} \cdot f \quad (12)$$

umgeformt. Somit ergibt sich ein konstanter Anteil und ein intervallbehafteter Anteil. Gleichung (12) lässt sich nun mit Hilfe einer Reihenentwicklung erster Ordnung (siehe Gleichung (7)) lösen

$$\begin{aligned} d^1 &= (E_0 \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \cdot f + \dots \\ &+ (E_0 \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \cdot (-\Delta E \cdot \mathbf{K}_{mod}) \cdot \dots \\ &\cdot (E_0 \cdot \mathbf{K}_{mod} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \cdot f \quad (13) \end{aligned}$$

Der erste Summand ist dabei konstant, wohingegen der zweite Term einen intervallbehafteten Faktor beinhaltet, der komplett vor die Matrixmultiplikationen gezogen werden kann. Damit kann das Gleichungssystem unabhängig von jeglichen Parameterunsicherheiten gelöst werden und anschließend mit Hilfe der Intervallarithmetik aufsummiert werden.

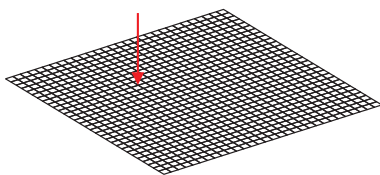


Abbildung 1: Diskretisierte Platte mit Anregung durch Punktkraft

Unsichere Dichte

Analog zum Elastizitätsmodul und dessen Einfluss auf die Steifigkeitsmatrix ist die Massenmatrix direkt proportional zur Dichte. Dementsprechend kann in dem Fall einer unsicheren Dichte diese als Faktor vor die Massenmatrix gestellt werden $\mathbf{M} = \rho \cdot \mathbf{M}_{mod}$. Damit folgt aus Gleichung (9)

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \rho \cdot \mathbf{M}_{mod}] \cdot u = f \quad (14)$$

Für eine intervallbehaftete Dichte $\rho = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0 + [-d\rho, d\rho]$ ergibt sich daraus entsprechend

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \cdot (\rho_0 + \Delta\rho) \cdot \mathbf{M}_{mod}] \cdot u = f \quad (15)$$

Diese Gleichung wird wiederum umgeformt zu

$$d = [(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \rho_0 \cdot \mathbf{M}_{mod}) - \omega^2 \cdot \Delta\rho \cdot \mathbf{M}_{mod}]^{-1} \cdot f \quad (16)$$

Sie lässt sich mit Hilfe der Reihenentwicklung erster Ordnung (siehe Gleichung (7)) zu

$$\begin{aligned} d^1 &= (\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \rho_0 \cdot \mathbf{M}_{mod})^{-1} \cdot f + \dots \\ &+ (\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \rho_0 \cdot \mathbf{M}_{mod})^{-1} \cdot (\omega^2 \cdot \Delta\rho \cdot \mathbf{M}_{mod}) \cdot \dots \\ &\cdot (\mathbf{K} - \omega^2 \rho_0 \cdot \mathbf{M}_{mod})^{-1} \cdot f \quad (17) \end{aligned}$$

lösen. Auch diese Lösung enthält entsprechend einen konstanten und einen intervallbehafteten Anteil, aus deren Summe letztendlich das unsichere Ergebnis resultiert.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der dargestellten Vorgehensweise beschrieben.

Unsicherer Elastizitätsmodul

Abbildung 2 zeigt die Verschiebung eines Knotens in Abhängigkeit der Frequenz bei einem unsicheren Elastizitätsmodul. Aufgetragen sind dabei sowohl der Modalwert als auch das Infimum und das Supremum, die mit Hilfe der Reihenentwicklung berechnet wurden. Zu Vergleichszwecken sind zusätzlich der Modalwert, das Infimum und das Supremum dargestellt, die aus der Lösung von Gleichung (9) mit dem Modalwert, dem Infimum sowie dem Supremum des Elastizitätsmoduls resultieren. Es ist zu erkennen, dass es im Bereich der Eigenfrequenz zu deutlichen Abweichungen, jedoch nur zu geringen Überschätzungen des Ergebnisses führt. Im Fall des Supremums kommt es sogar zu einer Unterschätzung.

Abbildung 3 zeigt den absoluten Fehler aufgetragen über der Frequenz. Auch hier zeigt sich, dass die tatsächlichen Abweichungen vergleichsweise hoch sind. Um das Ergebnis besser einordnen zu können, wird daher ein relativer normativer Fehler e der Lösung

$$e = \frac{\|d_{Reihe} - d_{Vergleich}\|}{\|d_{Vergleich}\|} \quad (18)$$

in Abhängigkeit der Lösung mit Hilfe der Reihenentwicklung d_{Reihe} und der Vergleichslösung $d_{Vergleich}$, also

der Lösung von Gleichung (9) mit den zugehörigen Werten, bestimmt. Es ergibt sich dabei ein mittlerer normativer Fehler von $e = 1,0033$. Das heißt, dass die Abweichungen der Vektornormen gemittelt über die Platte verhältnismäßig gering sind.

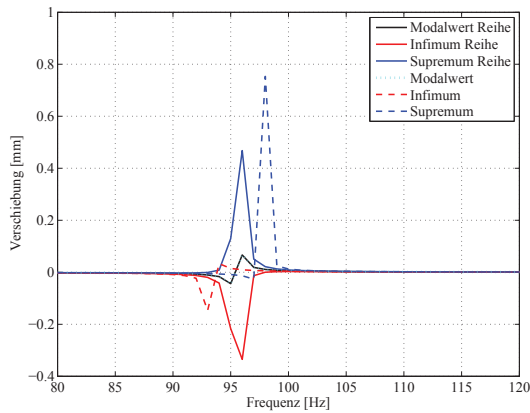


Abbildung 2: Verschiebung eines Knotens bei unsicherem Elastizitätsmodul

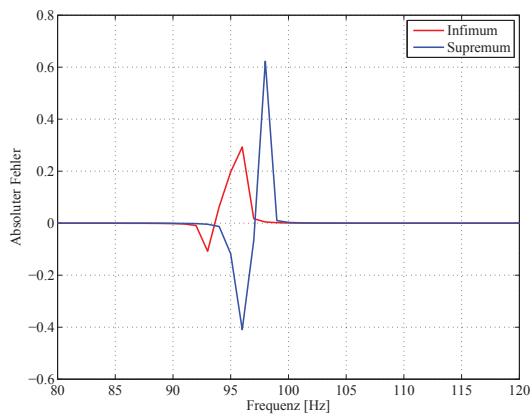


Abbildung 3: Fehler der Verschiebung eines Knotens bei unsicherem Elastizitätsmodul

Unsichere Dichte

Analog zum vorangegangenen Abschnitt zeigt Abbildung 4 die Verschiebung eines Knotens in Abhängigkeit der Frequenz bei einer unsicheren Dichte. Aufgetragen sind dabei wieder sowohl der Modalwert als auch das Infimum und das Supremum, die mit Hilfe der Reihenentwicklung berechnet wurden. Zu Vergleichszwecken sind zusätzlich der Modalwert, das Infimum und das Supremum dargestellt, die aus der Lösung von Gleichung (9) hervorgehen. Es ist wie auch beim unsicheren Elastizitätsmodul zu erkennen, dass es im Bereich der Eigenfrequenz zu deutlichen Abweichungen, jedoch nur zu geringen Überschätzungen des Ergebnisses führt.

Abbildung 5 zeigt den relativen Fehler bezogen auf den Vergleichswert aufgetragen über der Frequenz. Auch hier zeigt sich, dass die relativen Abweichungen ausschließlich nahe der Eigenfrequenz vergleichsweise hoch sind. Auch in diesem Fall wird daher ein relativer normativer Fehler e aus Gleichung (18) bestimmt. Es ergibt sich dabei ein mittlerer normativer Fehler von $e = 1,3585$. Das heißt,

dass die Abweichungen der Vektornormen gemittelt über die Platte verhältnismäßig gering sind.

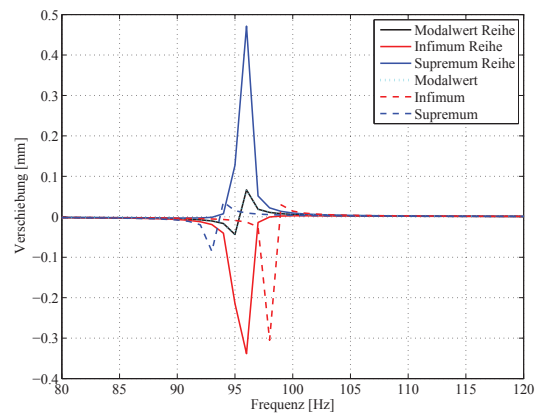


Abbildung 4: Verschiebung eines Knotens bei unsicherer Dichte

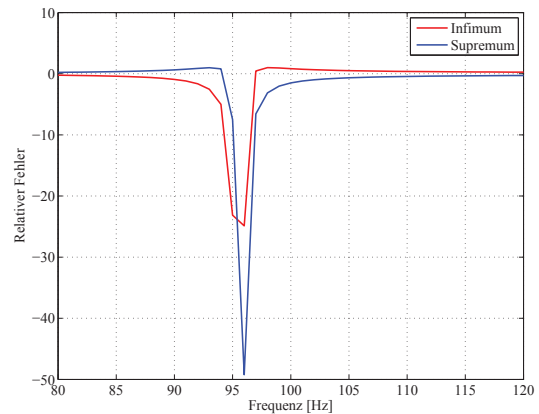


Abbildung 5: Relativer Fehler der Verschiebung eines Knotens bei unsicherer Dichte

In beiden Fällen, sowohl für einen unsicheren Elastizitätsmodul als auch für eine unsichere Dichte, zeigt das Verfahren sinnvolle Ergebnisse und ein gutes Verhalten. Es konnte damit dessen Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden. Konkret im Bereich von Eigenfrequenzen ist das vorgestellte Vorgehen für die Bestimmung lokaler Größen nicht geeignet. Dies liegt daran, dass die Eigenwerte der Matrix \mathbf{C} auch im intervallbehafteten Anteil dominieren. Eine Korrektur der Eigenwerte sowie -vektoren der Systemmatrix in Richtung der Systemmatrizen von Infimum und Supremum kann dagegen Abhilfe schaffen. Dies ist insbesondere bei weiterführenden Rechnungen sowie gekoppelten Systemen sinnvoll.

Für globale Abschätzungen hingegen sind sinnvolle Aussagen mit Hilfe des Verfahren möglich. Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Methode zur Abschätzung akustischer gemittelter Größen, wie dem Schalldämmmaß oder auch einem mittleren Schalldruck im Fluid, sehr gut geeignet ist.

Zusammenfassung

Es wurde eine Methode vorgestellt, um ein intervallbehaftetes FE-System mit Hilfe der FEM zu lösen. Dabei wur-

de gezeigt, dass das Verfahren prinzipiell dazu geeignet ist, Ergebnisintervalle für FE-Systeme abzuschätzen, jedoch einzelne Einschränkungen existieren. Weiterführend ist das vorgestellte Anwendungsbeispiel um ein Fluid und die Kopplung zwischen Struktur zu ergänzen sowie eine Anpassung der Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrizen vorzunehmen.

Literatur

- [1] Alefeld, G.; Herzberger, J.: Introduction to Interval Computations.
Academic Press, New York, 1983
- [2] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden.
Springer, Heidelberg, 2002
- [3] Hargreaves, G.I.: Interval Analysis in MATLAB.
Numerical Analysis Report No. 416, Manchester Centre for Computational Mathematics. 2002
- [4] Mayer, L.; von Estorff, O.: On the Applicability of Interval Arithmetics to Uncertain Coupled Vibroacoustic FE-models.
AIA-DAGA Meran, 2013
- [5] Moore, R.: Interval Analysis.
Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1966
- [6] Rump, S.M.: INTLAB - INTerval LABoratory.
In Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing, pages 77-104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999