

# Simulation der Schallabstrahlung großer Strukturen mit Hilfe von hierarchischen Matrizen

Boris Dilba<sup>1</sup>, Otto von Estorff<sup>2</sup>, Olgierd Zaleski<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Novicos GmbH, 21073 Hamburg, E-Mail: dilba@novicos.de

<sup>2</sup> TU Hamburg-Harburg, Inst. f. Modellierung und Berechnung, 21073 Hamburg

## Einleitung

Die schnelle Boundary-Elemente-Methode (BEM) der hierarchischen Matrizen ermöglicht es, vollbesetzte Systemmatrizen mit quasi linearem Aufwand von  $O(n \cdot \log(n))$  zu verarbeiten, so dass auch Probleme mit über 1 Million Freiheitsgrade gelöst werden können. Speziell für große schallabstrahlende Strukturen ist das Verfahren der hierarchischen Matrizen sehr gut geeignet. Zum einen ist es durch den algebraischen Ansatz sehr robust und zum anderen sehr effizient, da geometrisch weit voneinander entfernte Cluster sehr gut komprimiert werden können. Für Außenraumprobleme ist es wichtig, dass die BEM-Gleichungen regularisiert werden, so dass das Auftreten von irregulären Frequenzen vermieden werden kann und das Problem eine eindeutige Lösung besitzt. Eine weitverbreitete Methode zum Regularisieren des Außenraumproblems ist das Vorgehen von Burton-Miller [5], bei dem die BEM-Operatoren durch einen komplexen Koppelfaktor miteinander kombiniert werden.

In diesem Beitrag wird eine weitere Methode vorgestellt, die die BEM-Gleichungen durch Kombination der BEM-Operatoren regularisiert. Dabei wird gezeigt, dass die resultierende BEM-Gleichung eine sehr günstige Eigenwertclusterung besitzt, so dass nur wenige Schritte eines iterativen GMRES-Lösers benötigt werden. Anhand von Beispielen großer schallabstrahlender Strukturen wird verdeutlicht, dass die H-Matrix-BEM speziell für Probleme mit vielen rechten Seiten ein sehr effizientes Simulationswerkzeug darstellt.

## 1. Boundary Element Methode (BEM)

Die akustische Wellengleichung für den eingeschwungenen Zustand, d.h. zeitlich harmonische Schwingungen, ist durch

$$\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad k = \omega/c \quad (1)$$

gegeben. Gleichung (1) ist auch als Helmholtzgleichung bekannt. Die Wellenzahl ist durch  $k = \omega/c$  mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  gegeben. Partielle Integration der schwachen Formulierung von (1) zusammen mit der Fundamentallösung für  $d = 3$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2)$$

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

führen auf die Randintegralgleichung (BIE)

$$\begin{aligned} c(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} p(\mathbf{x}) \partial\Omega(\mathbf{x}) \\ = i\rho\omega \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v_n(\mathbf{x}) \partial\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

mit der Dichte  $\rho$ , dem akustischen Druck  $p$  und der Geschwindigkeit  $v_n$  in Normalenrichtung  $\vec{n}$ . Nach der Diskretisierung von (3) führt die Verwendung der Kollokationsmethode auf das lineare Gleichungssystem (4), vgl. [2] und [4],

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)p = i\rho\omega V v_n \quad (4)$$

Für die gewöhnliche BEM sind die Matrizen  $K$  und  $V$  voll besetzt, so dass sich ein quadratischer Speicherbedarf ergibt. Das direkte Lösen von (4) führt zu einem kubischen ( $n^3$ ) Lösungsaufwand. Iteratives Lösen kann den Aufwand auf  $mn^2$  mit  $m < n$  reduzieren. Der Speicherbedarf und die Lösungszeit stellen die limitierenden Faktoren der mit der BEM berechenbaren Problemgrößen dar.

## 2. Schnelle BEM-Verfahren

Eine wesentliche Erweiterung des Einsatzbereiches der BEM kann durch die Verwendung von schnellen BEM-Methoden erreicht werden. Die am weitesten verbreitete Methode ist die Fast-Multipole-Methode (FMM), bei der eine Approximation des Matrix-Vektor-Produkts mit quasi-linearem Aufwand  $O(n \cdot \log(n))$  erzeugt wird. Die Approximation des Matrix-Vektor-Produkts ermöglicht den effizienten Einsatz von iterativen Solvern zum Lösen von (4).

Ein anderer Ansatz zur Reduzierung des Speicherbedarfs und der Lösungszeit ist die Verwendung von hierarchischen Matrizen (H-Matrizen), siehe [1] und [3]. Im Vergleich zur FMM werden bei dem Ansatz der H-Matrizen Approximationen der Systemmatrizen  $K$  und  $V$  aus Gleichung (4) erzeugt. Dabei wird die Kernelfunktion lokal durch Niedrigrangmatrizen der Form

$$A = \sum_{i=1}^k u_i v_i^H = UV^H \quad (5)$$

approximiert. Im Gegensatz zum analytischen Ansatz der FMM stellt das Verfahren der H-Matrizen eine algebraische Approximation der Kernelfunktion dar. Wie für die FMM lässt sich mit der Methode der H-Matrizen ebenfalls eine quasi-lineare Speicherkomplexität erzielen. Des Weiteren werden durch die H-Matrix-Arithmetik Matrixoperationen, wie z.B. Matrix-Vektor-Produkt, Matrix-Matrix-Produkt, Matrixinversion und Matrixfaktorisierung, mit quasi-linearem Aufwand ermöglicht. Speziell die hierarchische LU-

Faktorisierung lässt sich als effizienter Präkonditionierer für den iterativen Lösungsprozess verwenden.

### 3. Außenraumproblem

Das Außenraumproblem mit Neumann Randbedingungen ist durch

$$\begin{aligned} \Delta p(\mathbf{x}) + k^2 p &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} &= f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \frac{\partial p}{\partial r} - ikp &= 0 \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben. Zum Lösen des Außenraumproblems wird das Gleichungssystem (4) gelöst. Dabei ist festzustellen, dass (4) für einige Frequenzen, den sogenannten irregulären Frequenzen, singular wird. Eine bewährte Methode zum Regularisieren des Gleichungssystems ist die Kombination der Operatoren der BIE (3) mit den Operatoren der in Normalenrichtung abgeleiteten BIE

$$\begin{aligned} c(\mathbf{y}) \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y}) \partial n(\mathbf{x})} p(\mathbf{x}) \partial\Omega(\mathbf{x}) \\ = i\rho\omega \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} v_n(\mathbf{x}) \partial\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

Für die Operatoren der beiden Randintegralgleichungen (3) und (7) gilt folgende Beziehung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + K & -V \\ -D & \frac{1}{2}I - K' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{inc} \\ v_n^{inc} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Die Matrix wird auch als Calderón Projektion bezeichnet. Für die Calderón Projektion gilt die Eigenschaft  $P^2 = P$ , daraus ergeben sich folgende Identitäten

$$\begin{aligned} KV &= VK' \\ DK &= K'D \end{aligned} \quad (9)$$

Zur Kombination der beiden Gleichungen wird ein Koppelfaktor  $\alpha$  eingeführt.

$$\left(\frac{1}{2}I + K - \alpha D\right) p = i\rho\omega \left(V - \alpha \left(\frac{1}{2}I - K'\right)\right) v_n \quad (10)$$

Die optimale Wahl von  $\alpha$  ist die Neumann-zu-Dirichlet-Abbildung (NtD)

$$NtD = D^{-1} \left(\frac{1}{2}I - K'\right) \quad (11)$$

so dass sich mit  $\alpha = -NtD$  aus (10)

$$\left(\frac{1}{2}I + K - NtDD\right) p = i\rho\omega V \quad (12)$$

ergibt. Der Ansatz von Burton Miller [5] mit  $\alpha = -\frac{i}{k}$  kann auch als lokale Anwendung der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung auf der Oberfläche des abstrahlenden Objekts verstanden werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - ikp &= 0 \quad r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= ikp \rightarrow p = -\frac{i}{k} \frac{\partial p}{\partial r} \rightarrow NtD \approx -\frac{i}{k} \end{aligned} \quad (13)$$

Alternativ kann die Approximation der NtD-Abbildung durch die Anwendung künstlicher Randbedingungen auf der Oberfläche des Objekts erzeugt werden. Ein Verfahren, das (10) speziell für den Fall, dass die Wellenlänge klein gegenüber dem Objekt ist, gut regularisiert, ist durch die Methode der On Surface Radiation Condition (OSRC) gegeben, siehe [6]. Dabei wird die NtD-Abbildung durch

$$NtD \approx \frac{1}{ik} \left(1 + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-1/2} \quad (14)$$

approximiert mit dem Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta_{\Gamma}$ . Entsprechend dem Ansatz der Finiten Elemente, kann die schwache Form des NtD-Operators (14) diskretisiert werden. Zum iterativen Lösen von (10) wird lediglich das Matrix-Vektor-Produkt mit dem NtD-Operator benötigt. Hierzu wird die komplexe Wurzel einer Matrix  $X$  mit Hilfe der Padé-Approximation genähert

$$\sqrt{1+X} = C_0 + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{A_j X}{1+B_j X} \quad 8 \leq N_p \leq 12 \quad (15)$$

Die Faktoren  $A_j$ ,  $B_j$  und  $C_0$  sind entsprechend [6] gegeben. Für die Approximation des NtD-Operators reicht schon eine geringe Entwicklungslänge  $N_p$  aus, so dass das Matrix-Vektor-Produkt effizient gebildet werden kann.

### 4. Beispiel Würfel

Die beiden Regularisierungsverfahren werden für den Fall eines abstrahlenden Würfels mit der Kantenlänge 1m untersucht, mit  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  und  $c = 340 \text{ m/s}$ .

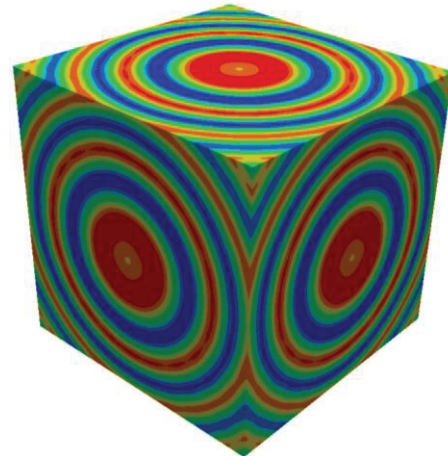
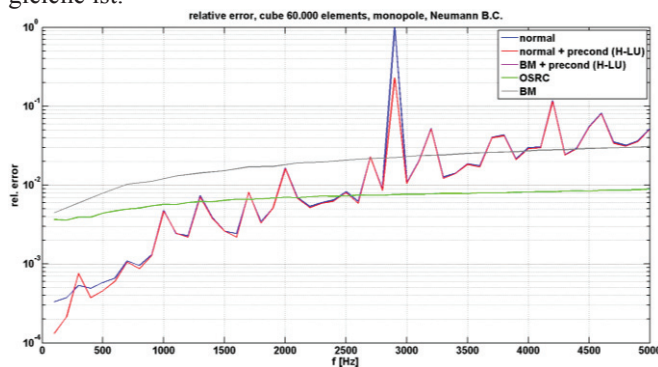


Abbildung 1: Realteil des Drucks  $p$  auf der Würfeloberfläche bei 1kHz

Auf der Oberfläche des Würfels werden Neumann Randbedingungen vorgeschrieben, die von einer Monopolquelle im geometrischen Schwerpunkt des Würfels abgeleitet werden, so dass der Dirichletfehler bzgl. der analytischen Lösung bestimmt werden kann.

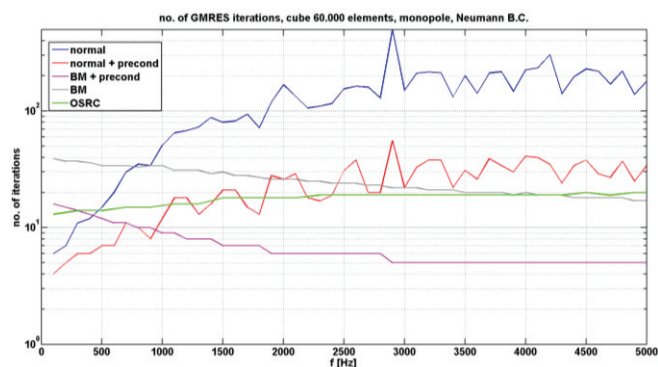
Für die OSRC-Regularisierung wird eine Galerkin-BEM verwendet, bei der die unbekannt Drücke in den Elementknoten linear über die Elemente approximiert werden. Beim Burton-Miller-Ansatz wird eine Kollokationsmethode mit konstanten Elementansätzen verwendet. Der Würfel ist mit 60.000 Quad-Elementen für das Kollokationsverfahren sowie 120.000 Tria-Elementen für die Galerkin-Methode diskretisiert, so dass die Diskretisierungen bis 5kHz gültig sind.

Der Verlauf des relativen Fehlers ist in **Abbildung 2** dargestellt. Es wird deutlich, dass der relative Fehler für den unteren Frequenzbereich bis ca. 1kHz für die unregularisierte Gleichung (3) kleiner ist, als für die regularisierte Gleichung (10). Im Gegensatz zu dem zackigen Verlauf des relativen Fehlers der unregularisierten Gleichung, zeigen die regularisierten Varianten einen glatten Verlauf über den Frequenzbereich. Dabei ist die OSRC-Regularisierung genauer als die Burton-Miller-Methode, was auf die unterschiedlichen Ansatzfunktionen zurückgeführt werden kann. Alle Varianten haben gemein, dass der relative Fehler erwartungsgemäß mit der Frequenz ansteigt, da die Diskretisierung über den gesamten Frequenzbereich die gleiche ist.



**Abbildung 2:** relativer Fehler des abstrahlenden Würfels

Betrachtet man die Anzahl der benötigten Iterationsschritte, siehe **Abbildung 3**, des GMRES-Lösers für eine Genauigkeit von  $\epsilon = 10^{-6}$ , so zeigt sich, dass die unregularisierte Variante die meisten Iterationsschritte benötigt. Die Anzahl der benötigten Schritte lässt sich durch die Präkonditionierung mit einer hierarchischen LU-Zerlegung und einer Genauigkeit von  $\delta = 10^{-1}$  deutlich reduzieren, hat aber keinen Einfluss auf den relativen Fehler. Neben dem



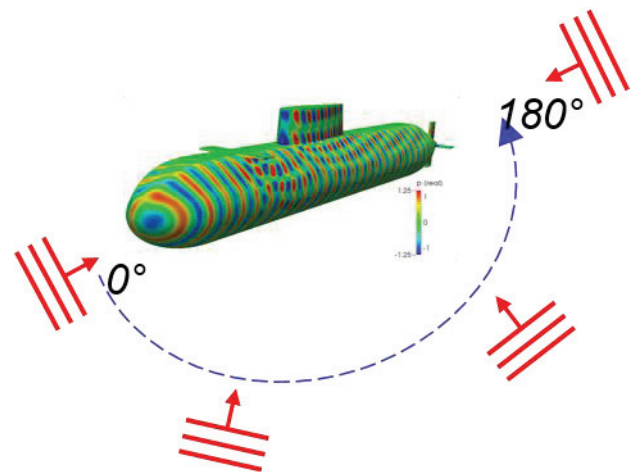
**Abbildung 3:** Iterationsschritte für den abstrahlenden Würfel

glatten Verlauf des Approximationsfehlers und der Lösbarkeit für alle Frequenzen, reduzieren die regularisierten Varianten die Anzahl der Iterationsschritte deutlich. Die Burton-Miller-Variante zeigt eine Abnahme der Iterationsschritte mit zunehmender Frequenz, was auf Gleichung (12) zurückgeführt werden kann. Mit steigender Frequenz bekommen die Abstrahlungseffekte mehr und mehr lokalen Charakter. Die OSRC-Variante nähert sich mit steigender Frequenz einer konstanten Anzahl von Iterationsschritten und ist vergleichbar mit dem Verhalten der Burton-Miller-Variante. Das effizienteste Verfahren ist durch das präkonditionierte Burton-Miller-Verfahren gegeben. Durch eine hierarchische LU-Zerlegung mit  $\delta = 10^{-1}$  lässt sich die Anzahl der Iterationsschritte auf 5 reduzieren.

### 5. Zielmaßberechnung

Im Rahmen des Benchmark Target Strength Simulation (BeTTSi) II Workshops, organisiert von der Forschungsanstalt der Bundeswehr für Wasserschall und Geophysik (FWG) in Kiel, wurde in einer Auftragsarbeit von ATLAS Elektronik Bremen eine Zielmaßberechnung eines Uboots für 1kHz und 3kHz durchgeführt.

Der generelle Aufbau der Zielmaßberechnung ist in **Abbildung 4** gezeigt. Das 60m lange Uboot ist mit 100.000 bzw. 1.000.000 Elementen für 1kHz bzw. 3kHz diskretisiert und umgeben von Wasser mit  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  und  $c = 1500 \text{ m/s}$ .



**Abbildung 4:** Aufbau der Zielmaßberechnung

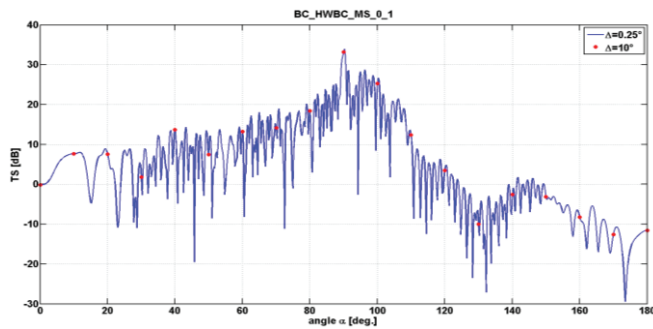
Das schallharte Uboot wird mit ebenen Wellen angeregt, deren Ursprünge sich auf einem Kreis mit  $R = 20\text{km}$  und Mittelpunkt im akustischen Zentrum des Uboots befinden. Ausgewertet wird das monostatische Zielmaß, bei dem der vom Uboot zurückgestrahlte Schalldruck im Quellpunkt bestimmt und ins Verhältnis zur anregenden Druckamplitude gesetzt wird

$$TS = 20 * \log_{10} \left( \frac{p_{scat}}{p_{in}} \right) \tag{16}$$

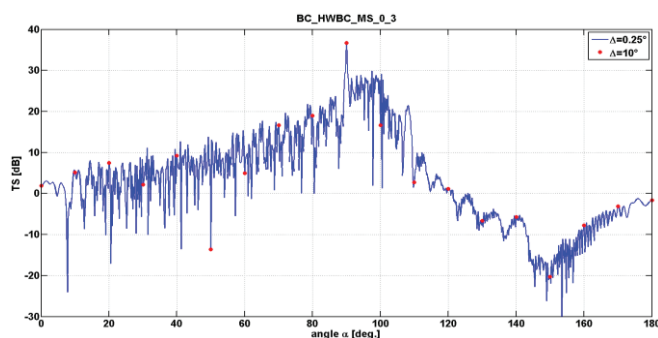
Aufgrund der großen Entfernung zum Objekt, wird eine feine Winkelauflösung benötigt, da andernfalls wichtige Informationen nicht aufgelöst werden können. Eine Winkelauflösung von  $\Delta^\circ = 0.25$  führt zu 720 Lastszenarien bzw. rechten Seiten. Speziell die vielen rechten Seiten



machen den Einsatz der H-Matrizen sehr effizient. Mit dem Ansatz von Burton-Miller und hierarchischer Prädiktionierung werden lediglich 3 – 4 Iterationsschritte mit dem GMRES-Verfahren ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ) pro Lastfall benötigt. Der Verlauf des Zielmaßes für 1kHz und 3kHz ist in **Abbildung 5** und **Abbildung 6** dargestellt. Das oszillatorische Verhalten des Zielmaßes über den Winkel ist dabei gut zu erkennen. Das Zielmaß ist in beiden Fällen für einen Einfallswinkel aus  $90^\circ$  am größten.

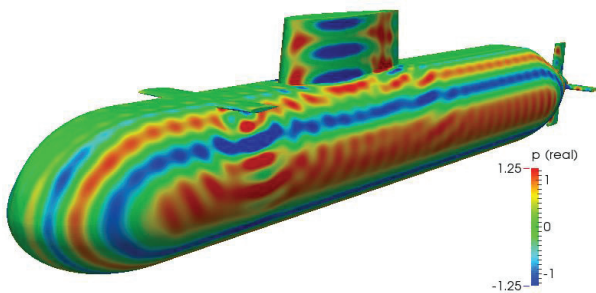


**Abbildung 5:** Zielmaß bei 1kHz



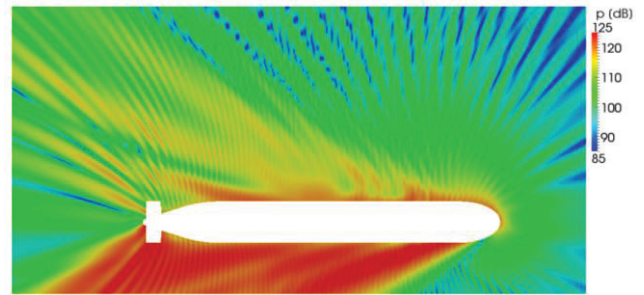
**Abbildung 6:** Zielmaß bei 3kHz

Die Schalldruckverteilung (scattered) für  $90^\circ$  ist in **Abbildung 7** gezeigt.



**Abbildung 7:** Schalldruck (scattered) auf der Oberfläche des Uboots für eine ebene Welle aus  $90^\circ$

Die Abstrahlcharakteristik des Uboots bei 1kHz für einen Einfallswinkel von  $30^\circ$  ist in **Abbildung 8** dargestellt. Dabei wird deutlich, dass das Uboot streifenförmig abstrahlt und deshalb eine feine Winkelauflösung benötigt.



**Abbildung 8:** Schallfeld (scattered) für einen Einfallswinkel von  $30^\circ$  bei 1kHz

## 6. Zusammenfassung

Neben der Burton-Miller-Regularisierung der BEM-Gleichungen wurde gezeigt, dass auch die OSRC-Methode eingesetzt werden kann. Beide Verfahren benötigen für das Modellproblem des abstrahlenden Würfels eine konstante Anzahl von Iterationsschritten mit steigender Frequenz. Eine weitere Beschleunigung des GMRES-Lösers kann durch eine hierarchische LU-Faktorisierung, die als Prädiktionierer verwendet wird, erzielt werden. Auch hier benötigt der GMRES-Löser mit steigender Frequenz eine konstante Anzahl von Iterationsschritten, die nochmal wesentlich geringer ist, als die der anderen Regularisierungsverfahren.

Die Anwendung des H-LU präkonditionierten Burton-Miller-Verfahrens für die Zielmaßberechnung des Uboots zeigt die gleiche Effizienz wie für das Modellproblem des Würfels. Für den 3kHz Fall werden lediglich 3 – 4 GMRES Schritte pro Lastfall benötigt. Beim Ansatz der H-Matrizen ist die Approximation der Systemmatrizen der zeitintensivste Schritt im Verfahren und im Gegensatz zur FMM werden diese gespeichert, so dass ein Matrix-Vektor-Produkt sehr günstig ist. Speziell bei Problemen mit vielen rechten Seiten, wie z.B. bei der Zielmaßberechnung, ist die Verwendung der H-Matrizen ein sehr effizientes Verfahren, da neben dem günstigeren Matrix-Vektor-Produkt verglichen mit der FMM auch höchst effiziente Prädiktionierer erzeugt werden können, die den Lösungsprozess weiter beschleunigen.

## Literatur

- [1] Bebendorf, M., Hierarchical Matrices: A Means to Efficiently Solve Elliptic Boundary Value Problems, Volume 63 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE), Springer-Verlag, 2008
- [2] von Estorff, O., Boundary Elements in acoustics-Advances and Applications, WIT Press, Southampton, 2000
- [3] Hackbusch, W., Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis, Springer-Verlag, 2009
- [4] Wu, T.W., Boundary Element Acoustics: Fundamentals and Computers Codes, WIT Press, 2000
- [5] Burton A. J., Miller G. F., The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 323, 1971
- [6] Darbas, M., Darrigrand, E., Lafranche Y., Combining Analytic Preconditioner and Fast Multipole Method for the 3-D Helmholtz Equation, Journal of Computational Physics Volume 236, 2013