

# Aktive Reduktion der Schallabstrahlung für gekoppelte Systeme mit Fluid-Struktur-Interaktion

Christian Hesse<sup>1</sup>, Michael Rose<sup>2</sup>, Hans Peter Monner<sup>3</sup>, Michael Sinapius<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik, 22335 Hamburg, Deutschland, Email: christian.hesse@dlr.de*

<sup>2</sup> *Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik, 38108 Braunschweig, Deutschland, Email: michael.rose@dlr.de*

<sup>3</sup> *Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik, 38108 Braunschweig, Deutschland, Email: hans.monner@dlr.de*

<sup>4</sup> *Institut für Adaptronik und Funktionsintegration, 38106 Braunschweig, Deutschland, Email: m.sinapius@tu-braunschweig.de*

## Einleitung

Aktive Lärmreduktionsmethoden stellen eine effektive Lösung für tieffrequente Schallabstrahlungsprobleme dar. Um eine globale akustische Beruhigung in resonanten Kavitäten bei Verwendung von strukturellen Fehlersensoren zu erreichen, muss die Dynamik der Kavität bei der Reglerauslegung berücksichtigt werden. Als Kostenfunktion für den Regler wird die akustische potentielle Energie im Fluid anhand der umgebenden Strukturschnellen quantifiziert.

Dieses Vorgehen führt jedoch zu hohen Modellordnungen, welche heutige Signalverarbeitungssysteme nicht leisten können. Um die Reglerdimension zu reduzieren wird ein Satz struktureller Schallstrahlungsmoden erzeugt, welche orthogonal bezüglich der akustischen potentiellen Energie sind und deren Reduktion eine globale akustische Schallminderung nach sich zieht.

Zu diesem Zweck wird die modale Interaktionstheorie verwendet, welche es erlaubt, Strukturmoden und Fluidmoden getrennt zu berechnen. Da bei diesem Ansatz die Schnellekontinuität an der Interaktionsfläche verletzt wird, müssen ausreichend Moden der entkoppelten Teilsysteme verwendet werden um den physikalischen Kopplungsmechanismus abzubilden. Die modale Interaktionstheorie wird zunächst validiert und anschließend gezeigt, dass bei einer auskonvergierten Lösung die Schallstrahlungsformen unabhängig von der Frequenz und diese damit für eine Reduktion der Reglerordnung geeignet sind.

## Theorie

Für die aktive Regelung der Schallabstrahlung in begrenzten Räumen wird die akustische potentielle Energie (APE) als globales Gütefunktional verwendet, welche sich zu

$$E_p(\omega) = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \int_{V_f} |p(\mathbf{r}, \omega)|^2 dV \quad (1)$$

als Volumenintegral der Schalldruckquadrate  $p(\mathbf{r}, \omega)$  in den Punkten  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  berechnet. Darin beschreiben  $\rho_0$  die Fluidichte und  $c_0$  die Schallgeschwindigkeit im Fluid. Die akustische potentielle Energie ist frequenzabhängig und über der Zeit gemittelt [1], die Frequenzabhängigkeit wird im Folgenden der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Basierend auf der modalen Interaktionstheorie [2] wird eine Synthese der Strukturmoden im Vakuum sowie der akustischen Moden mit schallharten Randbedingungen

durchgeführt. Es werden modale Freiheitsgrade  $q_s$  der Strukturschnellen zu

$$v(\mathbf{r}_S) = \sum_{l=1}^{n_s} q_{s,l} \psi_l(\mathbf{r}_S) \quad (2)$$

und  $q_f$  des Fluids zu

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_f} q_{f,j} \phi_j(\mathbf{r}). \quad (3)$$

eingeführt, wobei  $\mathbf{r}_S = (x_S, y_S, z_S)$  einen Punkt auf der schwingenden Strukturoberfläche beschreiben.

Aufgrund der Orthogonalität der akustischen Moden sowie durch Substitution von Gleichung (3) in Gleichung (1), kann die APE zu

$$E_p = \frac{1}{4\rho c^2} \sum_{j=1}^{n_f} \Gamma_j |q_{f,j}|^2 = \mathbf{q}_f^H \mathbf{L} \mathbf{q}_f, \quad (4)$$

umformuliert werden, wobei  $\mathbf{q}_f$  den  $(n_f \times 1)$ -dimensionalen Vektor der akustischen modalen Amplituden beschreibt.  $\mathbf{L}$  ist dabei eine Diagonalmatrix, mit den Einträgen

$$\mathbf{L}(j, j) = \frac{\Gamma_j}{4\rho c^2}, \quad (5)$$

wobei  $\Gamma_j = \int_V \phi_j(\mathbf{r}) dV$  den Volumennormalisierungsfaktor der  $j$ -ten akustischen Mode beschreibt.

Um die APE in Abhängigkeit der strukturellen Schwingungsschnellen zu beschreiben, wird eine modale struktur-akustische Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  eingeführt, so dass gilt:

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{Z} \mathbf{q}_s. \quad (6)$$

$\mathbf{Z}$  hat die Dimension  $(n_f \times n_s)$  und  $\mathbf{q}_s$  ist der  $(n_s \times 1)$ -dimensionale Vektor der  $n_s$  strukturellen modalen Amplituden. Unter Vernachlässigung zusätzlicher Quellen im Fluid kann die Transferfunktion aus dem Kirchhoff-Helmholtz Integral für eine schallharte Kavität zu

$$p(\mathbf{r}) = i\rho\omega \int_S G(\mathbf{r}_S|\mathbf{r}) v(\mathbf{r}_S) dS, \quad (7)$$

beschrieben werden, mit  $i = \sqrt{-1}$  und  $G(\mathbf{r}_S|\mathbf{r})$  als Green-Funktion der akustischen Kavität mit schallharten Randbedingungen [2]:

$$G(\mathbf{r}_S|\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_f} \frac{\Phi_j(\mathbf{r}_S) \Phi_j(\mathbf{r})}{\Gamma_j (\kappa_j^2 - k^2)}. \quad (8)$$

$\kappa_j = \frac{\omega_j}{c}$  beschreibt darin die resonante Wellenzahl der  $j$ -ten akustischen Mode und  $k = \frac{\omega}{c}$  ist die akustische Wellenzahl bei der Anregungsfrequenz  $\omega$ .

Durch Einsetzen von Gleichung (2) sowie Gleichung (7) in Gleichung (6) und Auflösen nach  $\mathbf{Z}$ , ergibt sich

$$\mathbf{Z} = \frac{i\rho\omega}{\Gamma_j(\kappa_j^2 - k^2)}\mathbf{B}, \quad (9)$$

wobei die modale Kopplungsmatrix  $\mathbf{B}$  als

$$\mathbf{B} = \int_S \Phi_j(\mathbf{r}_S)\Psi_l(\mathbf{r}_S)dS \quad (10)$$

substituiert wurde. Mit dieser Formulierung der Transferfunktion kann die APE aus Gleichung (4) umgeschrieben werden als

$$E_p = \mathbf{q}_s^H \mathbf{Z}^H \mathbf{L} \mathbf{Z} \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s^H \mathbf{\Pi} \mathbf{q}_s, \quad (11)$$

sodass sie eine quadratische Funktion der strukturellen Schnelleamplituden in Abhängigkeit der sogenannten Fehlergewichtungsmatrix (EWM: *error weighting matrix*) ist [3, 4]. Diese Formulierung wird in dieser Untersuchung als Gütefunktion für den Regler verwendet. Da bei der modalen Interaktionstheorie die Schnellekontinuität an der Interaktionsfläche vernachlässigt wird, muss eine Vielzahl von Moden der entkoppelten Teilsysteme berücksichtigt werden [5], welche oberhalb des betrachteten Frequenzbereichs liegen. Aus diesem Grund wird zunächst eine Validierung der Formulierung für das betrachtete System durchgeführt.

## Simulationsmodell

Das in dieser Arbeit verwendete Simulationsmodell der strukturellen Zylinderschale sowie des eingeschlossenen Fluids ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Zylinderschale ist  $L = 3$  m lang, hat einen Radius von  $R = 0.5$  m sowie eine Materialstärke von  $t = 2$  mm. Die Struktur besteht aus Aluminium mit einem E-Modul von  $E = 74$  GPa, einer Dichte von  $\rho_s = 2700$  kg/m<sup>3</sup> sowie einem Dämpfungsverhältnis von 1%. Die Materialparameter der Luft sind  $c = 343$  m/s als Schallgeschwindigkeit und  $\rho = 1.204$  kg/m<sup>3</sup> als Fluidichte. Die Ränder der Kavität sind als schallharte Flächen modelliert.

Um die Ergebnisse der modalen Interaktionstheorie zu validieren, wurde zusätzlich eine gekoppelte harmonische Analyse in ANSYS® durchgeführt, wobei die akustische und strukturelle Schnelle an den koinzidenten Knoten entlang der Interaktionsfläche gleichgesetzt wurden. Die APE wird dabei nach Gleichung (1) berechnet. Die Struktur wird durch eine Punktkraft in  $y$ -Richtung an der Position  $(x_m, y_m, z_m) = (0m, 0.5m, 1.5m)$  angeregt. Ein Vergleich der resultierenden APE in der Kavität mit der modalen Interaktionstheorie nach Gleichung (11) ist in Abbildung 2 aufgetragen. Dabei wird die Anzahl der verwendeten Moden der Teilsysteme variiert, so dass alle Eigenformen unterhalb einer Grenzfrequenz  $f_g$  in der Berechnung berücksichtigt werden. Des Weiteren wird der Einfluss der Verwendung von Finiten Elementen mit linearen bzw. quadratischen Ansatzfunktionen

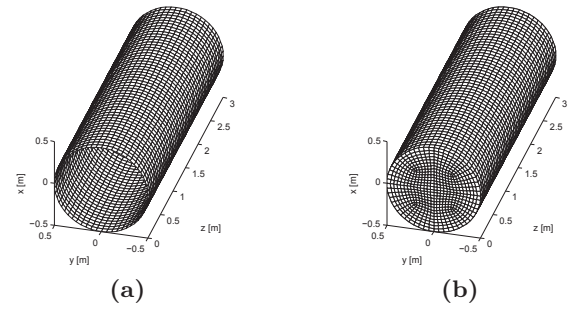


Abbildung 1: Vernetztes Finite Element Modell der strukturellen Zylinderschale (links) und des eingeschlossenen Fluids (rechts)

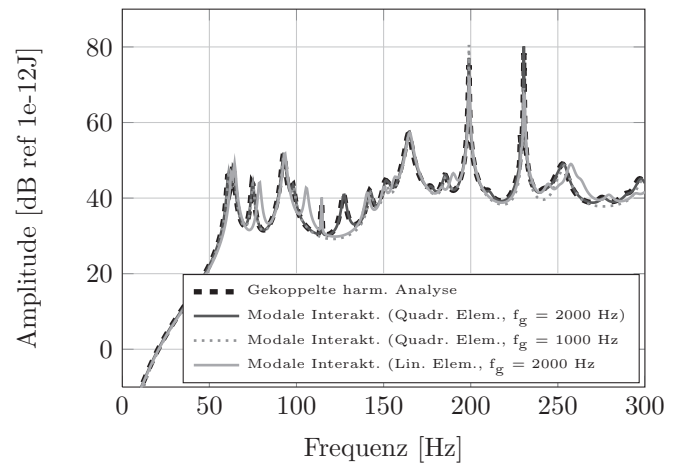


Abbildung 2: Vergleich des akustischen potentiellen Energiepegels in der Kavität in Folge einer strukturellen Punktkraftanregung

dargestellt.

Die Verwendung quadratischer Elemente unter Berücksichtigung der Eigenformen bis zur Grenzfrequenz  $f_g = 2000$  Hz resultiert dabei in einer hinreichenden Genauigkeit der Beschreibung der Fluid-Struktur-Interaktion. Bei der Verwendung von linearen Elementen bzw. geringerer Anzahl von verwendeten Moden zeigen sich dagegen deutliche Abweichungen der resultierenden APE.

## Schallstrahlungsmoden gekoppelter Systeme

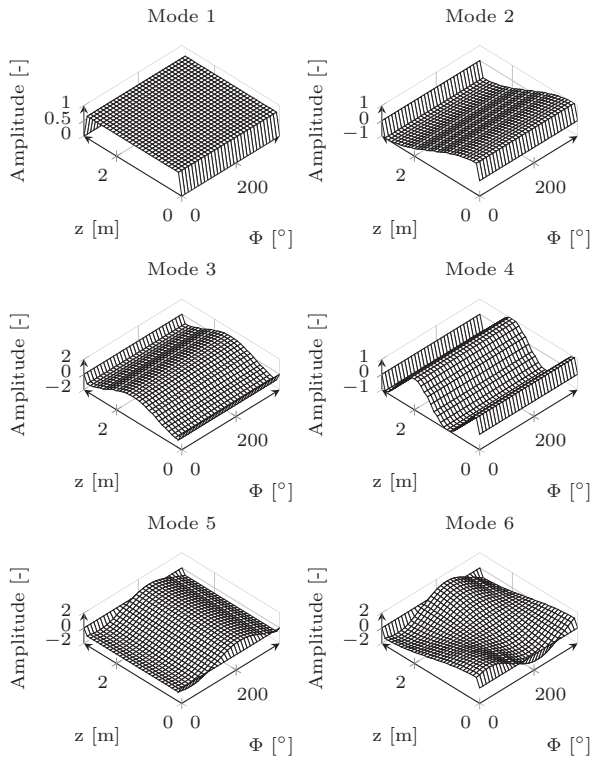
Die reelle und symmetrische EWM aus Gleichung (11) lässt sich mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung zu

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (12)$$

in eine Diagonalmatrix  $\mathbf{S}$  und eine voll besetzte Matrix  $\mathbf{U}$  zerlegen. Dabei beschreiben die Spalten von  $\mathbf{U}$  die Schallstrahlungsformen, welche orthogonal bezüglich der Schallabstrahlung in die Kavität sind. Die frequenzabhängige Singulärwertzerlegung resultiert für jede Frequenz in einer Sortierung vom größten zum kleinsten Singulärwert. Der Singulärwertverlauf über der Frequenz

kann mit Hilfe der Orthogonalität der Schallstrahlungsformen für jede Frequenz wiederhergestellt werden[6].

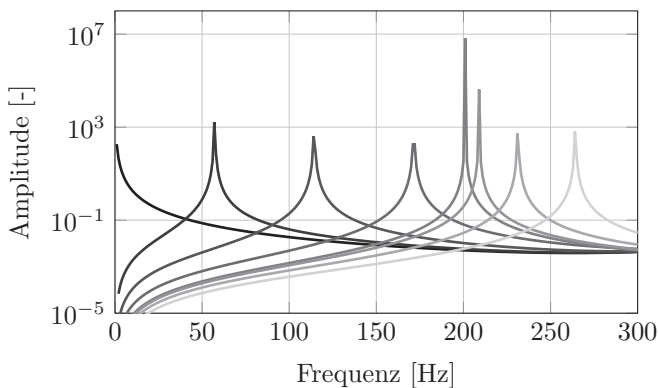
Die Schallstrahlungsformen 1-6 der Innenraumabstrah-



**Abbildung 3:** Schallstrahlungsformen 1-6 der Innenraumabstrahlung

lung sind in Abbildung 3 über dem abgerollten Umfang aufgetragen. Die sortierten Singulärwerte sind in Abbildung 4 abgebildet. Die Schallstrahlungsformen korrespondieren dabei zu den Kavitätsmoden an der Interaktionsfläche und die zugehörigen Singulärwerte besitzen ein Maximum in der akustischen Resonanzfrequenz.

Die aus der Singulärwertzerlegung resultierenden Schall-



**Abbildung 4:** Sortierte Singulärwerte der Innenraumabstrahlung

strahlungsmoden sind in ihrer Form unabhängig von der Frequenz und damit gut für eine Filterimplementierung von geringer Modellordnung geeignet. Diese Frequenzunabhängigkeit lässt sich auch durch Umstellen von  $\mathbf{\Pi}$  aus

**Tabelle 1:** Optimierte Aktuatorpositionen

	x [m]	y [m]	z [m]
Aktuator 1	0.0177	0.4997	2.1848
Aktuator 2	0.4998	0.0154	1.4399
Aktuator 3	-0.4918	0.0353	0.6422
Aktuator 4	-0.4918	0.0901	2.9736
Aktuator 5	0.4998	-0.0154	0.5572
Aktuator 6	0.4885	-0.1067	0.9062

Gleichung (11) zu

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{B}^H \mathbf{\Omega}^H \mathbf{L} \mathbf{\Omega} \mathbf{B} \quad (13)$$

zeigen, wobei  $\mathbf{\Omega}$  eine frequenzabhängige Diagonalmatrix ist, welche sich zu

$$\mathbf{\Omega} = \frac{i\rho\omega}{\Gamma_j(\kappa_j^2 - k^2)} \quad (14)$$

berechnet. Die Formulierung in Gleichung (13) hat eine ähnliche Struktur wie Gleichung (12), da  $\mathbf{\Omega}^H \mathbf{L} \mathbf{\Omega}$  eine Diagonalmatrix und  $\mathbf{B}$  eine voll besetzte frequenzunabhängige Matrix ist. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Zeilen von  $\mathbf{B}$  nicht den Schallstrahlungsmoden entsprechen, da diese die Fluidmoden enthalten, welche nicht orthogonal entlang der Interaktionsfläche sind. Aus diesem Grund lässt sich eine Singulärwertzerlegung der EWM nicht umgehen.

Die Singulärwerte beschreiben den relativen Anteil der Schallstrahlungsformen an der APE pro Frequenz. Aufgrund ihrer Orthogonalität führt die Reduktion der Beiträge zu den Schallstrahlungsmoden somit auch zu einer Reduktion der APE. Die Orthogonalität erlaubt es, einen Großteil der Schallstrahlungsformen zu vernachlässigen, wenn wenige Singulärwerte in einem begrenzten Frequenzband dominant sind, so dass

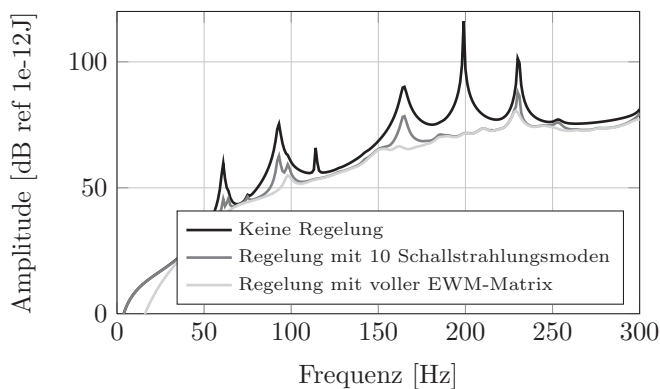
$$\mathbf{\Pi} \approx \mathbf{U}_r \mathbf{S}_r \mathbf{U}_r^T \quad (15)$$

Dabei hat  $\mathbf{U}_r$  die Dimension  $(n_s \times n_r)$ , wobei  $n_r$  die Anzahl der betrachteten Schallstrahlungsmoden beschreibt. Die Diagonalmatrix  $\mathbf{S}_r$  hat die Dimension  $(n_r \times n_r)$ .

## Ergebnisse

Zur Steuerung der APE unter harmonischer Anregung werden strukturelle Punktkräfte an den in Tabelle 1 gezeigten Positionen verwendet. Diese resultieren aus einer Optimierung durch einen genetischen Algorithmus mit der Zielfunktion der Minimierung der APE in der Kavität unter akustischer Anregung der Struktur [7]. Da dabei der Ansatz der Optimalsteuerung verwendet wird, ist die breitbandige Unterdrückung sehr optimistisch, da Einschränkungen durch die Kausalität realer Signalverarbeitungssysteme vernachlässigt werden. Die Störgrößenunterdrückung kann vielmehr als obere Grenze der erreichbaren Schallstrahlungsreduktion angesehen werden.

Zur Steuerung der Gütefunktion wird zum Einen die volle EWM aus Gleichung (11) als Referenz verwendet und



**Abbildung 5:** Störgrößenunterdrückung der akustischen potentiellen Energie

zum Anderen eine reduzierte Menge von  $n_r = 10$  Schallstrahlungsmoden entsprechend Gleichung (15).

Die Störgrößenunterdrückung der akustischen potentiellen Energie unter akustischer Anregung der Struktur ist in Abbildung 5 dargestellt. Dabei zeigen sich bei der Verwendung von zehn Schallstrahlungsfiltern eine vergleichbare globale Schallreduktion in der Kavität. Insbesondere bei akustisch dominierten gekoppelten Schwingungen, wie bspw. bei  $\approx 200\text{Hz}$ , sind hohe Störgrößenunterdrückungen unter Verwendung einer begrenzten Anzahl von Schallstrahlungsfiltern möglich.

## Zusammenfassung und Ausblick

Anhand eines generischen fluidgefüllten Zylinders wurde gezeigt, dass die Frequenzunabhängigkeit der Schallstrahlungsmoden für die akustische Innenraumabstrahlung zu einer Reduktion der Filterordnung für die tieffrequente Struktur-Akustik-Regelung geeignet ist.

Durch die Berücksichtigung der Kavitätsdynamik im Regler, wird dabei eine globale Störgrößenunterdrückung im begrenzten Fluid erreicht.

Weitere Untersuchungen werden sich der experimentellen Implementierung von Schallstrahlungsfiltern für die Innenraumabstrahlung widmen, bei denen auch Kausalitätsbedingungen der Signalverarbeitung berücksichtigt werden.

## Literatur

- [1] S.J. Elliott. Signal processing for active control. Academic Press, 2001.
- [2] F. Fahy, P. Gardonio. Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response. Academic Press; 2007.
- [3] Benjamin Seth Cazzolato. Sensing systems for active control of sound transmission into cavities. PhD thesis, The University of Adelaide, 1999.
- [4] W.M. Johnson, K.A. Cunefare. Use of principle velocity patterns in the analysis of structural acoustic optimization. The Journal of the Acoustical Society of America. 2007;121(2):938–948.

- [5] R. Srinivasan Puri. Krylov Subspace Based Direct Projection Techniques for Low Frequency, Fully Coupled, Structural Acoustic Analysis and Optimization. PhD thesis, Oxford Brookes University, 2008.
- [6] W.M. Johnson. Structural acoustic optimization of a composite cylindrical shell. PhD thesis, G. W. Woodruff School of Mechanical Engineering, 2004.
- [7] M. Rose, O. Unruh, T. Haase. Vibration Control of Stiffened Plates with Embedded Cavities Using Flat Piezoceramic Actuator Devices. Proc 18th International Congress on Sound and Vibration (ICSV 18); 10- 14 July 2011, Rio de Janeiro, Brazil 2011.