

CAD-BEM zur Lösung der Helmholtz-Gleichung

Sören Keuchel¹, Kerstin Vater¹, Olgierd Zaleski¹, Otto von Estorff¹

¹ Novicos GmbH, 21073 Hamburg, Deutschland, Email: keuchel@novicos.de

Einleitung

Die Berechnung von akustischen Fragestellungen basiert im Frequenzbereich auf der Lösung der Helmholtz-Gleichung. Die zugrundeliegende Differentialgleichung kann in eine Randintegralgleichung überführt und anschließend mithilfe der Boundary-Elemente-Methode (BEM) numerisch gelöst werden. Die BEM bietet den Vorteil, dass nur die Oberfläche des untersuchten Gebiets diskretisiert werden muss. Bei einem 3D-Problem resultieren somit 2D-Elemente zur Darstellung der Geometrie. Eine Schwierigkeit der genannten Methoden ist die Erstellung einer geeigneten Diskretisierung, die üblicherweise auf einer CAD-Geometrie beruht und über Lagrange-Elemente unterschiedlicher Ordnung realisiert wird. Hierdurch entstehen geometrische Ungenauigkeiten, da insbesondere runde Geometrien nicht exakt abgebildet werden können. Zudem sind die aus kommerzieller Software generierten Netze oft nicht direkt verwendbar und es muss zum Teil ein erheblicher Zeitaufwand für die manuelle Nachbearbeitung aufgewendet werden. Dieser Beitrag befasst sich mit der direkten Integration einer CAD-Geometrie in die BEM. Anstelle der Lagrange-Elementdefinition werden die Randintegrale auf Basis der Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), die zur Geometriedarstellung in CAD-Software verwendet werden, gelöst [2]. Die Umsetzung des Verfahrens wird erläutert und repräsentative Beispiele werden dargestellt.

Boundary-Elemente-Methode

In der Akustik beschreibt die Helmholtz-Gleichung die Wellenausbreitung im Frequenzbereich. Eine ausführliche Beschreibung ist in [3] gegeben, die im Folgenden zusammengefasst wird. Für die BEM wird die zugrundeliegende Differentialgleichung in die Randintegralgleichung

$$cp(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} p(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}ds_{\mathbf{y}} \quad (1)$$

überführt, mit $c = \frac{1}{2}$ auf einem glatten Rand, dem Quellpunkt \mathbf{x} , dem Feldpunkt \mathbf{y} , dem Normalenvektor \mathbf{n} , dem Schalldruck p und dem akustischen Fluss $q(\mathbf{y}) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}$. Für dreidimensionale Fragestellungen lautet die Fundamentallösung

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (2)$$

wobei k die Wellenzahl ist. Die Randintegralgleichung ermöglicht nach einer Diskretisierung der Oberfläche den Aufbau der Systemmatrix \mathbf{A} und des Anregungsvektors \mathbf{b} . Die Darstellung der Oberfläche Γ oder auch die Beschreibung der Feldgrößen wird über Interpolationsfunk-

tionen der Form

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^M \phi_m(\xi)f_m \quad (3)$$

realisiert, die von den Ansatzfunktionen $\phi_m(\xi)$ und den zugehörigen Stützpunkten f_m bestimmt wird. Die Wahl dieser Ansatzfunktionen bestimmt über das verwendete Verfahren, das zum Beispiel auf Lagrange-Funktionen oder NURBS-Funktionen basieren kann. Es ist zudem eine getrennte Wahl zwischen Feldgrößen und Geometrie möglich. Dieser Umstand wird im aktuellen Beitrag eingesetzt, um den Vergleich der Geometrie-Beschreibung zu realisieren. Sowohl im Fall der Lagrange-Elemente als auch im Fall der NURBS-Elemente wird zur Darstellung der Feldgrößen die Lagrange-Ansatzfunktionen beliebiger Ordnung verwendet [4]. Hieraus folgt, dass die Unterschiede sich rein auf die geometrischen Eigenschaften der untersuchten Objekte beziehen.

In der aktuellen Formulierung sind für die Lagrange-Elemente gesonderte Routinen für schwache, starke und hypersinguläre Integrale umgesetzt. Dies erlaubt die Verwendung der Burton-Miller-Formulierung zur Behebung der kritischen Frequenzen. In der CAD-BEM werden bisher nur schwache Singularitäten gesondert behandelt, weshalb diese Formulierung nur auf der Randintegralgleichung (1) beruht.

CAD-Beschreibung der Geometrie

Der heutige Standard in CAD-Software ist die Beschreibung mithilfe von NURBS. Diese beruhen auf rekursiv definierten B-Spline Basisfunktionen

$$B_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & : \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) - \frac{\xi - \xi_{i+p+1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

mit $\frac{0}{0} \equiv 1$

mit dem Polynomgrad p , dem Index der Basisfunktion i , der Koordinate im Parameterraum ξ und den Stützpunkten ξ_i des sogenannten Knotenvektors [2]. Die eindimensionalen Ansatzfunktionen ergeben sich dann mittels der Gewichte w_i zu

$$\mathbf{f}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)\mathbf{f}_i \quad (6)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{B_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n B_{i,p}(\xi)w_i} \quad (7)$$

Durch Multiplikation von zwei eindimensionalen Ansatzfunktionen können NURBS-Flächen dargestellt werden. Der Unterschied zwischen Lagrange- und NURBS-Elementen ist in den Abbildungen 1 und 2 für die Beschreibung einer Kugel mit 24 Elementen dargestellt.

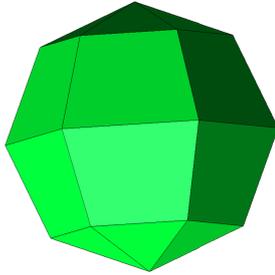


Abbildung 1: Kugel mit 24 Lagrange-Elementen [1]

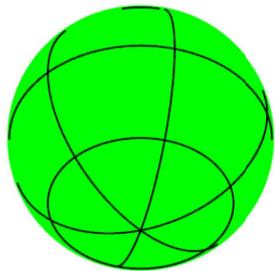


Abbildung 2: Kugel mit 24 NURBS-Elementen [1]

Die Beschreibung der Flächen wird auf sogenannten Patches realisiert. Diese wiederum bestehen aus Elementen, die im allgemeinen Fall jeweils unterschiedliche Ansatzfunktionen besitzen. Hieraus resultiert ein enormer numerischer Aufwand, der durch die Verwendung der Bezier-Extraktion reduziert werden kann [5]. Durch Hinzufügen von Stützpunkten werden die Ansatzfunktionen verändert, so dass sich einheitliche Interpolationsfunktionen auf den Elementen ergeben. Die Veränderung findet hierbei nur im Parameterraum statt und die Darstellung der Geometrie in globalen Koordinaten bleibt im gesamten Prozess identisch.

Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt soll die vorgestellte CAD-BEM mit einer konventionellen BEM, die auf einer Lagrange-Geometrie-Darstellung beruht, verglichen werden. Es werden 4 Beispiele gezeigt, die die einzelnen Besonderheiten der Formulierung aufzeigen. Als akustisches Medium wird Luft mit einer Schallgeschwindigkeit $c = 340$ m/s und einer Dichte von $\rho = 1.225$ kg/m³ angenommen. Als Parameter in den Untersuchungen wird unter anderem

die Integrationsordnung g und auch die Elementordnung, die sich in diesem Fall auf die Feldgrößen bezieht, variiert. Die Genauigkeit wird als Dirichlet-Fehler über die Formel

$$e_D = \frac{\|(\mathbf{p}_{num} - \mathbf{p}_{ref})\|}{\|\mathbf{p}_{ref}\|} \quad (8)$$

mit

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\int_{\Gamma} |\mathbf{p}|^2 d\Gamma} \quad (9)$$

berechnet. Aufgrund des Integrals wird ein Fehler im gesamten Element bestimmt, was eine höhere Aussagekraft besitzt als die Fehlerberechnung in den diskreten Kollokationspunkten. Als Referenzlösung \mathbf{p}_{ref} wird das analytische Schallfeld einer äquivalenten Monopolquelle mit den Koordinaten $\mathbf{x}_{mono} = [0, 3/0, 3/0, 3]$ verwendet.

Im ersten Beispiel wird ein Würfel mit einer Kantenlänge von $a = 1$ m bei einer Frequenz von $f = 100$ Hz untersucht. Die Besonderheit in diesem Fall ist, dass sowohl die Lagrange- als auch die NURBS-Elemente die Geometrie exakt beschreiben. Eine weitere Eigenschaft des Würfels ist, dass die abgeleitete Fundamentallösung

$$\frac{\partial G(\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} = \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|^3} (ik|\mathbf{r}| - 1) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \quad (10)$$

keinen Einfluss besitzt. Durch die ebenen Flächen ist das Skalarprodukt von \mathbf{r} und $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ gleich Null und somit auch der gesamte Term. In den Integrationsroutinen muss daher nur die schwache Singularität, die für beide Elementtypen umgesetzt ist, behandelt werden. Bei korrekter Umsetzung müssen die Ergebnisse beider Formulierungen daher identisch sein. In Abbildung 3 ist der in Gleichung (8) beschriebene Fehler über der Elementordnung (Feldgrößen) aufgetragen. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung und bestätigen die korrekte Umsetzung. Auch das zu erwartende Verhalten in Bezug auf die Integrationsordnung wird deutlich. Bei einer höheren Elementordnung muss auch die Integrationsordnung erhöht werden, da sich im Fall der Elementordnung 3 bereits $k = 4 \cdot 4 = 16$ Kollokationspunkte mit den entsprechenden Ansatzfunktionen auf einem Element befinden. Bei noch höheren Elementordnungen müsste die Integrationsordnung weiter angepasst werden, um auch hier noch Genauigkeitssteigerungen zu erzielen.

Das zweite Beispiel ist die Abstrahlung einer Kugel mit dem Radius $r = 1$ m bei einer Frequenz von $f = 100$ Hz. In diesem Fall sollen zum ersten Mal die Vorteile der NURBS-Formulierung gezeigt werden, da nur noch diese Darstellung die exakte Abbildung der Geometrie erlaubt. Die Lagrange-Elemente können hierbei, auch bei wesentlich höheren Auflösungen, nur noch eine Approximation der Oberfläche erreichen. Eine Schwierigkeit aus der Krümmung der Elemente ergibt sich jedoch bei der starken Singularität der abgeleiteten Fundamentallösung aus Gleichung (10), da das Skalarprodukt nicht notwendigerweise Null ist. Für diesen Fall müsste eine gesonderte Integrationsroutine verwendet werden, die jedoch

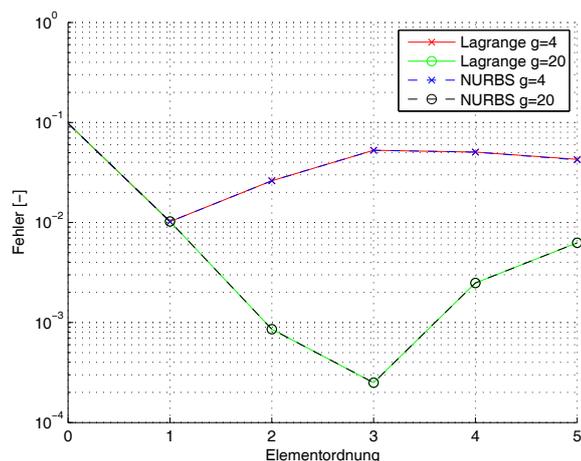


Abbildung 3: Würfel bei $f = 100$ Hz: Dirichlet-Fehler in Abhängigkeit der Elementordnung (Feldgrößen) für zwei unterschiedliche Integrationsordnungen g

in der aktuellen Formulierung nicht umgesetzt ist. In Abbildung 4 ist der Dirichlet-Fehler über der Elementordnung aufgetragen. Bis zur Elementordnung 2 ist der Vorteil der NURBS-Elemente deutlich, obwohl noch keine gesonderte Behandlung der starken Singularität umgesetzt ist. Die exakte Geometriebeschreibung führt zu höheren Genauigkeiten der Lösung. Ab der Elementordnung 3, die auf 16 Kollokationspunkten pro Element und daher $s = 16 \cdot 16 = 256$ Matrixeinträgen pro Element aus stark singulären Integrationen beinhaltet, wird die Notwendigkeit einer gesonderten Integrationsroutine deutlich. Üblicherweise werden jedoch maximal lineare und in seltenen Fällen quadratische Elementordnungen eingesetzt, woraus sich eine Relativierung dieses Ergebnisses ergibt und die Vorteile der NURBS-Elemente in diesem Beispiel deutlich werden.

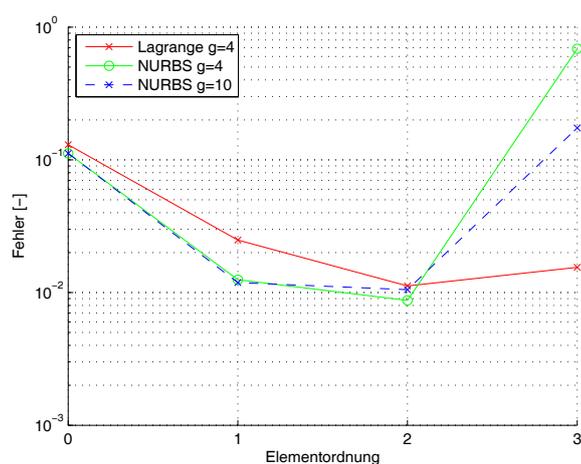


Abbildung 4: Kugel bei $f=100$ Hz: Dirichlet-Fehler in Abhängigkeit der Elementordnung (Feldgrößen)

Im dritten Beispiel sollen die Möglichkeiten durch die direkte Verbindung zur CAD-Geometrie gezeigt werden. Die Basis für die Untersuchung stellt erneut die Kugel

aus dem vorherigen Beispiel dar, wobei die Ausgangsbeschreibung der Geometrie entweder auf den CAD-Daten oder der Lagrange-Darstellung (Mesh) beruht. Üblicherweise wird aus vorhandenen CAD-Daten ein Lagrange-Mesh erstellt, das die Geometrie und die Feldgrößen nach gewählter Güte darstellt. Dieses Vorgehen beinhaltet meist mehrere Durchläufe und Nacharbeiten bis das gewünschte Resultat erzielt wird. Reicht die einmalig gewählte Auflösung bei höheren Frequenzen nicht mehr aus, so ist der einfachste Fall die Unterteilung der Lagrange-Elemente, da hierfür keine aufwändigen Vernetzungs-Durchläufe durchgeführt werden müssen. Durch diese Unterteilung können die Feldgrößen besser approximiert werden, jedoch führt dieses Vorgehen zu keiner besseren Approximation der Geometrie. Soll auch die Geometrie genauer dargestellt werden, so ist eine Verbindung zu den CAD-Daten notwendig. Zudem kann es vorkommen, dass nur ein Lagrange-Mesh vorhanden ist und keine CAD-Daten vorliegen. In Abbildung 5 ist der Unterschied von zwei Szenarien an dem Beispiel der Kugel aufgeführt. Die Elementordnung ist sowohl bei der Lagrange- als auch bei der NURBS-Formulierung zu $p = 2$ gewählt. Besteht eine Verbindung zur CAD-Geometrie (CAD) und wird das eingesetzte Lagrange-Mesh nach jeder Elementunterteilung neu vernetzt (Lagrange $p=2$, CAD), so zeigt die Genauigkeit eine sichtbare Steigerung. Besteht keine Verbindung zu den CAD-Daten und eine einfache Unterteilung der Lagrange-Elemente wird durchgeführt (Lagrange $p=2$, Mesh), ist zwar eine Verringerung des Fehlers zu sehen, aber diese fällt weit weniger gut aus als bei der Variante mit Verbindung zu den CAD-Daten. Die dritte Variante ist die neue CAD-BEM (NURBS), die eine automatische und direkte Verbindung zur CAD-Geometrie beinhaltet, da der Schritt der Lagrange-Diskretisierung entfällt. Der Fehler ist im gesamten Verlauf geringer als bei der besseren Variante der beiden Berechnungen mit Lagrange-Elementen.

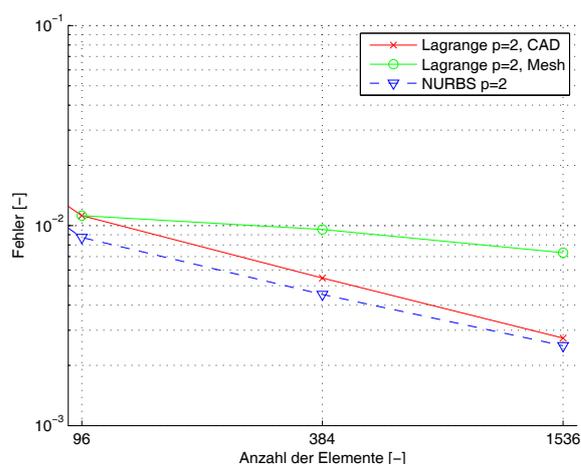


Abbildung 5: Kugel bei $f=100$ Hz: Dirichlet-Fehler in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente bei unterschiedlicher Ausgangsdiskretisierung (CAD/Lagrange-Mesh)

Das letzte Beispiel soll die weiteren Herausforderungen der aktuellen Formulierung aufzeigen. Die entwickel-

te CAD-BEM besitzt aktuell nur Integrationsroutinen für schwache Singularitäten. Für das Problem der kritischen Frequenzen kann die Burton-Miller-Formulierung verwendet werden, die jedoch auch hypersinguläre Integrationen erfordert bei denen eine einfache Gauss-Integration in keinem Fall mehr ausreicht. In Abbildung 6 ist der Dirichlet-Fehler über der Frequenz aufgetragen. Das untersuchte Objekt ist die zuvor verwendete Kugel mit 96 beziehungsweise 384 Elementen bei unterschiedlichen Elementordnungen p . Für die konventionellen Lagrange-Elemente sind hypersinguläre Integrationsroutinen umgesetzt, weshalb der Einsatz der Burton-Miller-Formulierung (BM) möglich ist. Der Unterschied bei den Lagrange-Elementen wird hier deutlich, da ohne BM die kritischen Frequenzen zu hohen Fehlern führen. Auch bei der NURBS-Formulierung sind die kritischen Frequenzen deutlich zu sehen und der Einsatz der BM wäre sinnvoll. Neben dem Effekt der kritischen Frequenzen ist nochmal deutlich der Vorteil der CAD-BEM in Bezug auf die Genauigkeit zu sehen. Bei Erhöhung der Elementordnung von $p=0$ auf $p=1$ bei 96 Elementen und auch beim Einsatz von 384 Elementen sind deutliche Steigerungen der Genauigkeit im untersuchten Frequenzbereich zu sehen.

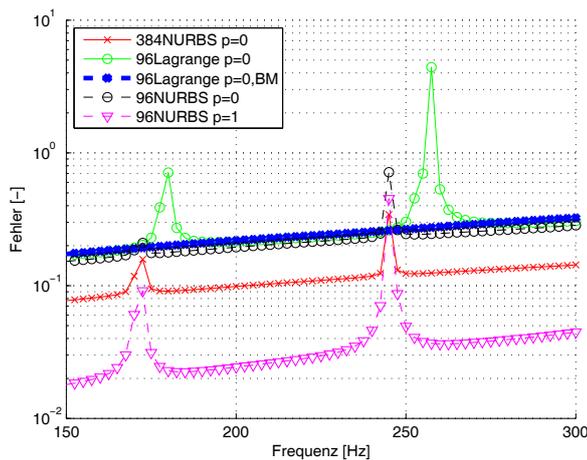


Abbildung 6: Kugel: Dirichlet-Fehler über der Frequenz zur Untersuchung der kritischen Frequenzen in Verbindung mit der Burton-Miller-Formulierung (BM)

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine CAD-BEM vorgestellt, die eine exakte Beschreibung der Geometrie ermöglicht. Die CAD-Daten, die auf NURBS-Funktionen beruhen, können direkt in der BEM-Formulierung verwendet werden. Die Beschreibung der Feldgrößen beruht auf Lagrange-Ansatzfunktionen beliebiger Ordnung und spezielle Integrationsroutinen für schwache Singularitäten sind umgesetzt. Die Ergebnisse zeigen das Potential der neuen Formulierung, das zum einen durch die genauere Beschreibung der Geometrie erzielt wird, zum anderen aber auch eine leichtere Verbindung von CAD-Software und numerischen Methoden erlaubt.

Die vorgestellte Formulierung ist ein erster Schritt im Bereich der direkten Verwendung von CAD-Daten zur Berechnung akustischer Fragestellungen. Die Verfahren mit Lagrange-Elementen weisen jedoch in vielen Bereichen ausgereifere Umsetzungen aus. Als Ausblick können hier einige Themengebiete genannt werden, wie zum Beispiel die Umsetzung von Routinen für starke und hypersinguläre Integrale, der Einsatz von schnellen BEM-Verfahren, wie H-Matrizen und der Fast-Multipole-Methode, oder auch die Untersuchung von NURBS-Ansatzfunktionen für die Feldgrößen.

Literatur

- [1] Hagelstein, N. C.: Numerische Akustik auf Basis einer CAD-Geometrie. Projektarbeit, Institut für Modellierung und Berechnung, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2015
- [2] Hughes, T. ; Cottrell, J. A. ; Bazilevs, Y. : Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), Nr. 39-41, S. 4135–4195
- [3] Keuchel, S.; Biermann, J.; von Estorff, O.: A combination of the fast multipole boundary element method and Krylov subspace recycling solvers. Engineering Analysis with Boundary Elements 65, pp.136-146, 2016
- [4] Keuchel, S.; Vater, K.; von Estorff, O.: A High Order Fast Multipole Boundary Element Method. In: International Congress on Sound and Vibration, ICSV 22. Florence, Italy, 2015
- [5] Simpson, R. N. ; Scott, M. A. ; Taus, M. ; Thomas, D. C. ; Lian, H. : Acoustic isogeometric boundary element analysis. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 269 (2014), S. 265–290