Vergleich unterschiedlicher Formulierungen in der Strömungsakustik

Marcus Guettler, Steffen Marburg
Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Technische Universität München
Boltzmannstraße 15, 85748 Garching b. München, Deutschland, Email: Marcus.Guettler@tum.de

Einleitung

Die Aeroakustik befasst sich grundlegend mit der Entstehung und Ausbreitung von Schallwellen in strömenden Medien. Als Beispiel sei die turbulente Strömung in und hinter einem Flugzeugtriebwerk genannt. Sowohl die Strömung als auch die akustische Abstrahlung sind mithilfe der Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Fluide beschreibbar. Durch die mathematische Komplexität existiert ein erhöhter Aufwand bei der Lösung mit numerischen Methoden. Vereinfachte akustischen Analogien gehen auf die Arbeiten von Lighthill, Curle und Ffowcs Williams und Hawkings zurück. Vereinfachte Formulierungen der Navier-Stokes-Gleichungen sind als linearisierte Euler-Gleichungen oder Störungsgleichungen bekannt. Einen anderen Ansatz verfolgte Galbrun [2]. Er betrachtete eine akustische Welle in einer Strömung als Differenz zwischen einer gestörten Strömung und einer Referenzströmung unter Zuhilfenahme einer Euler-Lagrange Betrachtungsweise. Erfolgreiche Behandlungen der Galbrun-Gleichung finden sich in Bonnet-Ben Dhia u.a. [1], Retka u.a. [3] und Treyssede u.a. [4].
In der vorliegenden Arbeit werden unterschiedliche Formulierungen der Strömungsakustik, d.h. Linearisierte Navier-Stokes-Gleichungen (LNSE), Linearisierte Euler-Gleichungen (LEE), Galbrun-Gleichung (rein verschiebungsbasiert) und Galbrun-Gleichung (gemischt formuliert), anhand des Eigenwertproblems einer zweidimensionalen Rohrströmung gegenübergestellt.

Betrachtungsweise des Kontinuums

Im Folgenden werden grundlegende kontinuumsmechanische Zusammenhänge mithilfe der Abb. 1 erörtert. Eine beliebige Größe Φ, welche ein Tensorfeld n-ter Stufe darstellt, kann demnach unterschiedlich definiert werden, wobei Φ die Größe in der gestörten Strömung und Φ_0 die Größe in der Referenzströmung repräsentiert.

Euler'sche Beschreibung

In der Euler'schen Betrachtung ist die Größe Φ nicht an ein materielles Teilchen gebunden. Man betrachtet die Entwicklung von Φ für einen speziellen Punkt im Raum. Es ergibt sich folgender Zusammenhang.

$$\Phi'(\boldsymbol{y},t) = \Phi(\boldsymbol{y},t) - \Phi_0(\boldsymbol{y},t). \tag{1}$$

Φ' beschreibt die Störung in Euler'scher Betrachtungsweise.

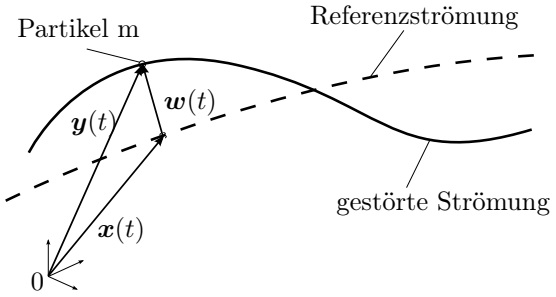

Abbildung 1: Kontinuumsmechanische Betrachtungsweise der Partikelverschiebung

Lagrange'sche Beschreibung

In der Lagrange'schen Betrachtungsweise bezieht man sich auf ein materielles Teilchen. Die Größe Φ ist dadurch direkt an das Partikel m geknüpft. Die Lagrange'sche Störung einer Größe Φ ergibt sich folglich zu

$$\tilde{\Phi}(m,t) = \Phi(m,t) - \Phi_0(m,t), \tag{2}$$

wobei sich das Partikel in der Referenzströmung an einer anderen Position befindet als in der gestörten Strömung. Der Verlauf eines jeden Partikels muss dadurch bekannt sein, um das Feld der Größe Φ zu beschreiben.

Gemischte Formulierung

Der Grundgedanke beider Betrachtungen wird kombiniert und es ergibt sich eine neue Beschreibung der Störungen

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{x},t) = \Phi(\boldsymbol{y},t) - \Phi_0(\boldsymbol{x},t). \tag{3}$$

Die Beschreibung des Feldes der Größe Φ erfolgt durch die Kenntnis einer Referenzströmung und einer Lagrange'schen Störung an derselben Stelle x. Die Euler'sche Störung kann schließlich mit

$$\Phi'(\boldsymbol{y},t) = \tilde{\Phi}(\boldsymbol{x},t) - [\Phi_0(\boldsymbol{y},t) - \Phi_0(\boldsymbol{x},t)] \tag{4}$$

berechnet werden, wobei die Referenzströmung bekannt sein muss und der Zusammenhang zwischen y und x, d.h. die Partikelverschiebung w.

Grundgleichungen

Grundlage sind die Bilanzgleichungen des Kontinuums, d.h. Massenbilanz, Impulsbilanz und Energiebilanz, die mithilfe der materiellen Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{D}()}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial()}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla() \tag{5}$$

wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{6}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} \tag{7}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla\boldsymbol{v} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho r \tag{8}$$

Diese Gleichungen beschreiben die Erhaltung von Masse, Impuls und spezifischer innerer Energie mit der Dichte ρ, dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$, dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, dem Volumenkraftvektor $\boldsymbol{f}$, der spezifischen inneren Energie e, dem Wärmeflussvektor $\boldsymbol{q}$ und Wärmequellen zusammengefasst in r. Der Spannungstensor ist mit $\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\tau}$ gegeben, wobei $\boldsymbol{p} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ und $\boldsymbol{\tau}$ den viskosen Spannungstensor darstellen. Im Weiteren wird zur Koordinatenschreibweise innerhalb eines kartesischen Bezugsystems übergegangen, wobei die Einstein'sche Summationskonvention gilt. Partielle Ableitungen nach den Ortskoordinaten werden mit $\frac{\partial()}{\partial x_k} = ()_{,k}$ beschrieben.

Linearisierte Navier-Stokes-Gleichungen

Unter Betrachtung eines perfekten Gases als Stoke'sches Fluid mit Fourier'scher Wärmeleitung ergeben sich mit der Verwendung der Euler'schen Betrachtungsweise mit kleinen Störungen die Linearisierten-Navier-Stokes Gleichungen, wobei die Referenzgrößen den Bilanzgleichungen genügen.

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + v_{0k}\rho'_{,k} + v'_k\rho_{0,k} + \rho_0 v'_{k,k} + \rho' v_{0k,k} = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\rho_0\left(\frac{\partial v'_k}{\partial t} + v_{0l}v'_{k,l} + v'_l v_{0k,l}\right) + p'_{,k} - \frac{\rho'}{\rho_0}p_{0,k} - \\ &- \eta\left(v'_{k,ll} + \frac{1}{3}v'_{l,kl} - \frac{\rho'}{\rho_0}v_{0k,ll} - \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho_0}v_{0l,kl}\right) - \\ &- \rho_0 f'_k = 0_k\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p'}{\partial t} + v_{0k}p'_{,k} + v'_k p_{0,k} + \gamma\left(p_0 v'_{k,k} + p' v'_{0k,k}\right) - \\ &- (\gamma-1)4\eta\left[\left(v_{0k,l}d'_{kl} - \frac{1}{3}d'_{kk}d_{0ll}\right) + \right. \\ &\left. + \rho_0 r' + \rho' r_0 - \left(k_{kl}\Theta'_{,l}\right)_{,k}\right] = 0\end{aligned} \tag{11}$$

wobei

$$d'_{kl} = \frac{1}{2}\left(v'_{k,l} + v'_{l,k}\right) \quad \text{und} \quad d'_{kk} = v'_{k,k},$$
$$d'_{0kl} = \frac{1}{2}\left(v'_{0k,l} + v'_{0l,k}\right) \quad \text{und} \quad d'_{0kk} = v'_{0k,k}.$$

Linearisierte Euler-Gleichungen

Für reibungslose Fluide, d.h. $\eta = 0$, mit adiabatischen Zustand und unter Vernachlässigung äußerer Volumenkräfte und Wärmequellen ergeben sich die Linearisierten Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + v_{0k}\rho'_{,k} + v'_k\rho_{0,k} + \rho_0 v'_{k,k} + \rho' v_{0k,k} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial v'_k}{\partial t} + v_{0l}v'_{k,l} + v'_l v_{0k,l} + \frac{1}{\rho_0}p'_{,k} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}p_{0,k} = 0_k, \tag{13}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + v_{0k}p'_{,k} + v'_k p_{0,k} + \gamma\left(p_0 v'_{k,k} + p' v'_{0k,k}\right) = 0. \tag{14}$$

Galbrun-Gleichung, verschiebungsbasiert

Basierend auf den Euler-Gleichungen gelangt man über die gemischte Betrachtungsweise des Kontinuums auf die Galbrun-Gleichung, vergl. [2]:

$$\rho_0\frac{\mathrm{D}^2 w_k}{\mathrm{D}t^2} - p_{0\,,l}w_{k,l} + p_{0\,,k}w_{l,l} - \left(c_0^2\rho_0 w_{l,l}\right)_{,k} = 0_k \tag{15}$$

Galbrun-Gleichung, gemischt

Eine gemischte Formulierung der Galbrun-Gleichung bietet sich an, um eine höre Stabilität bei der numerischen Behandlung zu erreichen, vergl. [4]:

$$\rho_0\frac{\mathrm{D}^2 w_k}{\mathrm{D}t^2} - p_{0\,,l}w_{k,l} + p_{0\,,k}w_{l,l} + \tilde{p}_{,k} = 0_k \tag{16}$$

$$\tilde{p} = -c_0^2\rho_0 w_{l,l} \tag{17}$$

Numerische Simulationen

Um die unterschiedlichen Formulierungen zu vergleichen, wird ein akademisches Simulationsmodell heran gezogen. Es handelt sich um einen durchströmten Rechteckkanal mit schallharten Wänden, siehe Abbildung 2. Die Höhe beträgt $h = 0.5\,\mathrm{m}$ und die Länge $l = 3.4\,\mathrm{m}$. Zur Lösung

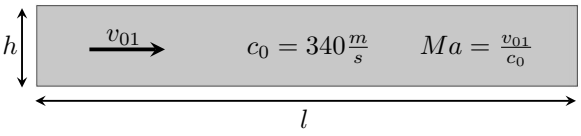

Abbildung 2: Geometrie des Rechteckkanals

der Differenzialgleichungen wurde Comsol Multiphysics zusammen mit Matlab LiveLink für Comsol verwendet, wobei die Machzahl in einem Bereich von $Ma = 0 - 0.3$ variiert und Eigenwerte bis 100 Hz berechnet wurden.

Ergebnisse

Abbildung 3 zeigt die komplexen Eigenwerte für die jeweiligen Formulierungen. Die Mach-Zahl ist entlang der Tiefenrichtung aufgetragen und zur besseren Sichtbarkeit farblich kodiert, wobei Türkis $Ma = 0$ und Rot $Ma = 0.3$ bedeuten. Untersucht man einen derartigen Fall analytisch, gelangt man zur vereinfachten Lösung für einen Rechteckkanal mit homogener und konstanter Durchströmung:

$$f_n = \frac{c_0 n}{2l}\left(1 - Ma^2\right). \tag{18}$$

Mit dem gegebenen Fall erwartet man Eigenwerte für 0 Hz, 50 Hz und 100 Hz mit einer von der Mach-Zahl quadratischen Abhängigkeit. Diese sind in Abbildung 3b)

und c) deutlich zu sehen, in a) und d) allerdings nur schwer erkennbar.

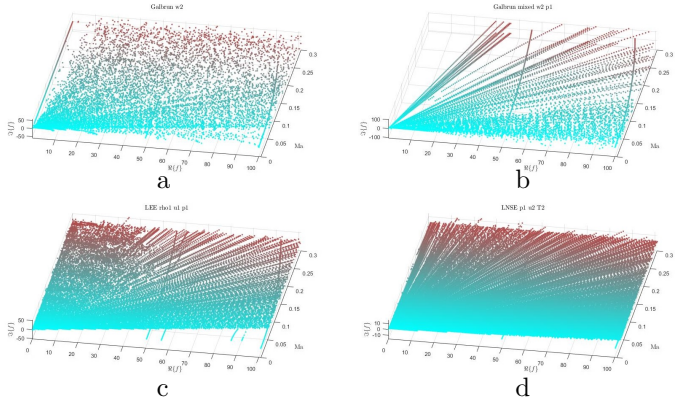

Abbildung 3: Resultate im 3D-Plot, komplexe Ebene über Mach-Zahl; a) Galbrun, verschiebungsbasiert, b) Galbrun, gemischt, c) LEE, d) LNSE

Betrachtet man die Mach-Zahl über dem Realteil der Eigenwerte, wird der Sachverhalt klarer, siehe Abbildung 4.

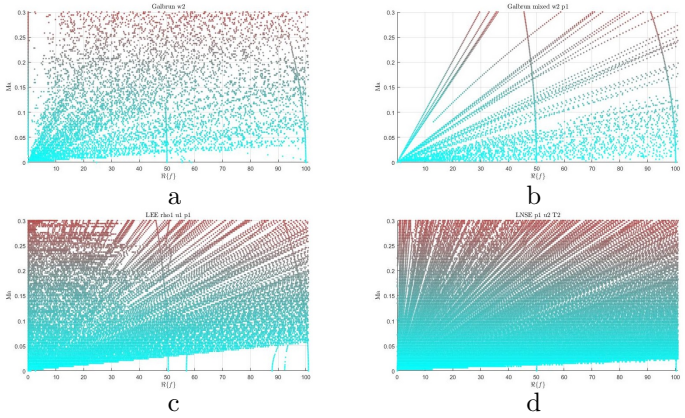

Abbildung 4: Resultate im 2D-Plot, Mach-Zahl über Realteil der Eigenwerte; a) Galbrun, verschiebungsbasiert, b) Galbrun, gemischt, c) LEE, d) LNSE

Ein Blick in die komplexe Ebene, vergl. Abbildung 5, zeigt interessante Zusammenhänge der Eigenwerte mit steigender Mach-Zahl (farblich kodiert). Man erkennt, dass bei der gemischten Formulierung der Galbrun-Gleichung die akustischen Eigenwerte auf der realen Achse liegen und mit steigender Mach-Zahl kleiner werden. Dieser Zusammenhang entspricht der analytischen Lösung. Alle übrigen Eigenwerte steigen mit größer werdender Mach-Zahl sowohl im Real- als auch im Imaginärteil. Bei den anderen Formulierungen ist eine derartig klare Charakterisierung der Eigenwerte und deren Zusammenhang mit der Mach-Zahl nicht eindeutig beschreibbar.
Der Blick auf den Imaginärteil über der Mach-Zahl, siehe Abbildung 6, bekräftigt diese Vermutung.
Es fällt auf, dass bei den Berechnungen zur Linearisierten Euler-Gleichung weitere Eigenwerte bei $Ma = 0$ existieren als die zu erwartenden. Im Folgenden werden diese näher betrachtet.
Abbildung 7 zeigt die ersten vier von null verschiedenen

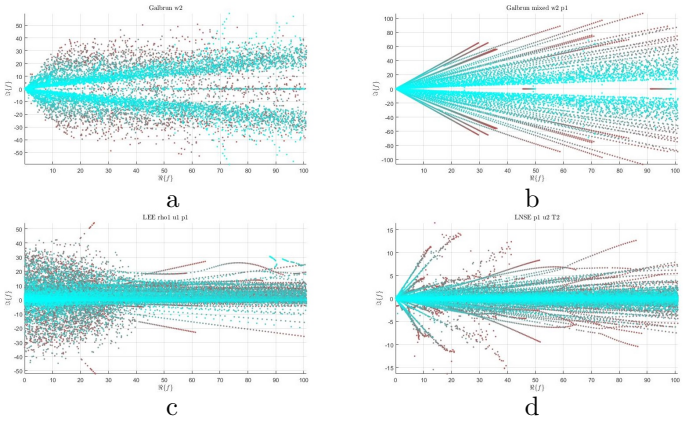

Abbildung 5: Resultate in 2D-Plot, Imaginärteil über Realteil der Eigenwerte; a) Galbrun, verschiebungsbasiert, b) Galbrun, gemischt, c) LEE, d) LNSE

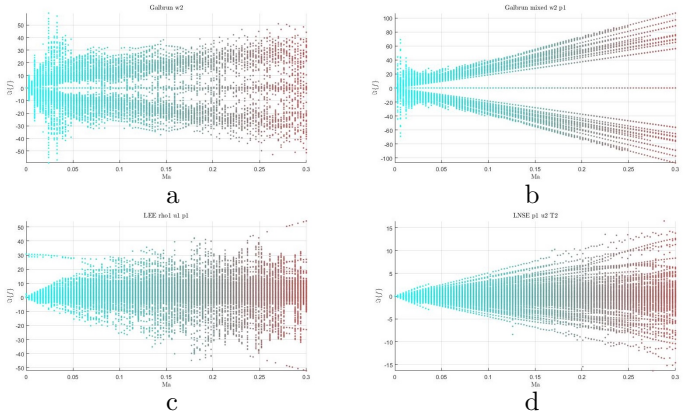

Abbildung 6: Resultate in 2D-Plot, Imaginärteil über Mach-Zahl; a) Galbrun, verschiebungsbasiert, b) Galbrun, gemischt, c) LEE, d) LNSE

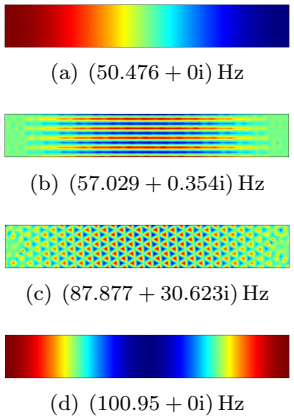

Abbildung 7: Eigenfrequenzen für Linearisierte Euler-Gleichung bei $Ma = 0$

Eigenwerte für $Ma = 0$, berechnet für die Linearisierte Euler-Gleichung. Neben den beiden zu erwartenden Eigenwerten für 50 Hz und 100 Hz existieren zwei weitere, für die eine hinreichende Interpretation fehlt. Es wird vermutet, dass die zweite Mode auf ein nicht ausreichend genaues Berechnen der Feldgradienten in Richtung der Elementkanten zurückzuführen ist und die dritte Mode

auf eine Art Hourglass Effekt, der in der Literatur als "checker boarding"bekannt ist. Hier bedarf es noch weiterer Untersuchungen.

Ausblick

Zukünftig ist geplant, die gemischte Formulierung der Galbrun-Gleichung für große Verformungen zu erweitern und damit einen größeren Mach-Zahl-Bereich berechnen zu können.

Literatur

[1] Bonnet-Ben Dhia, A. S.; Mercier, J. F.; Millot, F.; Pernet, S.; Peynaud, E.: Time-Harmonic Acoustic Scattering in a Complex Flow: A Full Coupling Between Acoustics and Hydrodynamics. *Commun. Comput. Phys.* **11** 2 (2012), pp. 555–572

[2] Galbrun, H.: Propagation d'une Onde Sonore dans l'Atmosphére et Theorie des Zones de Silence. Gauthier-Villars, Paris, 1931

[3] Retka, S.; Marburg, S.: An infinite element for the solution of Galbrun equation. *Zamm, Z. Angew. Math. Mech.* **93** 2-3 (2013), pp. 154–162

[4] Treyssede, F.; Gabard G.; Tahar, M. B.: A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian-Lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (2003), pp. 705–716