Konvergenz akustischer Außenraummoden mit infiniten Elementen

Lennart Moheit, Steffen Marburg
Lehrstuhl für Akustik mobiler Systeme, Technische Universität München
85748 Garching b. München, Deutschland, Email: lennart.moheit@tum.de

Einleitung

Das örtliche Schalldruckfeld in einem Fluid kann mit der Helmholtz-Gleichung beschrieben werden. Numerisch lässt sich dieses Problem mit der Finite-Elemente-Methode jedoch nur für Innenraumprobleme lösen, die von der räumlichen Ausdehnung beschränkt sind und reflektierende Außenränder aufweisen. Um den akustischen Außenraum ohne reflektierende Außenwände numerisch diskretisieren und berechnen zu können, werden an ein Gebiet finiter Elemente infinite Elemente angeschlossen, die die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung erfüllen [1, 2]. Für die Interpolation des Schalldruckfeldes in radialer Richtung werden in der Literatur verschiedene Polynome diskutiert [3, 4], die zu unterschiedlich gut konditionierten Problemen führen. Die Anzahl der radialen Freiheitsgrade der infiniten Elemente entspricht der Polynomordnung und mit Erhöhung der Ordnung konvergiert die berechnete, abgestrahlte Schallleistung. Die Methode der *normal modes* erlaubt es, den diskretisierten, akustischen Außenraum modal zu zerlegen. Für offene Strukturen im Fluid lassen sich Innenraum- sowie Außenraumeigenformen ermitteln und deren modale Schallleistungen superponieren. Mit feinerem Netz bzw. höhergradigen Interpolationspolynomen der infiniten Elemente führen die zusätzlichen Freiheitsgrade zu Moden, die mitunter als unphysikalische, mathematische Artefakte interpretriert werden können und die bei der späteren modalen Superposition zur Berechnung der abgestrahlten Schallleistung zu fehlerhaften Ergebnissen führen. In diesem Paper wird mittels Modal Assurance Criterion (MAC) die Konvergenz gerader und ungerader Polynomgrade anhand der Eigenwerte der *normal modes* und der Schallleistung nachgewiesen, sowie die Orthogonalitätseigenschaften der Moden und deren Einfluss auf die Superposition der Schallleistung untersucht.

Numerische Behandlung des akustischen Außenraums

Das örtliche Schalldruckfeld in einem Fluid kann über die kontinuierliche Helmholtzgleichung beschrieben werden

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Befindet sich im Inneren des Fluids ein Festkörper, so sei die Fluid-Struktur-Kopplung zu vernachlässigen, sodass die Schnelle der Strukturpartikel denen der Fluidpartikel auf der Körperoberfläche Γ_s entspricht $v_s = v_f$ (Randadmittanz $Y = 0$) und keine Dämpfungsverluste auftreten. Für den Schalldruck bedeutet dies

$$\nabla p(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_s = j\omega v_f(\mathbf{x})\rho_f \quad \text{auf} \quad \Gamma_s. \tag{2}$$

Für äußerlich berandete Gebiete (Innenraumprobleme) bietet die Finite-Elemente-Methode (FEM) ein Werkzeug zur Diskretisierung und numerischen Lösung des örtlichen Schalldruckfeldes. Hierbei wird die Helmholtzgleichung in eine schwache Formulierung überführt und über das Gebiet integriert. Die Randbedingungen fließen nach Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes ein. Test- und Ansatzfunktionen werden mittels Basisfunktionen diskretisiert und die Integrale elementweise für diskrete Knotenfreiheitsgrade numerisch gelöst, sodass sich ein diskretes, lineares Gleichungssystem ergibt

$$(\mathbf{K} - jk\mathbf{D} - k^2\mathbf{M})\mathbf{p} = j\omega\rho_f\mathbf{\Theta}\mathbf{v}_s = \mathbf{f}, \tag{3}$$

wobei $k = \omega/c_f$ die Wellenzahl ist und $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$ sowie $\mathbf{\Theta}$ die frequenzunabhängigen Systemmatrizen für Steifigkeit, Dämpfung, Masse und Randmasse sind.

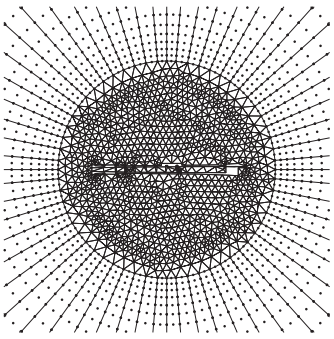


Abbildung 1: Das FE-Netz diskretisiert das kreisförmige Fluid um den Querschnitt einer Flöte, das IFE-Netz diskretisiert den außen angeschlossenen Außenraum.

Um das akustische Außenraumproblem numerisch zu behandeln, liefert die Infinite-Elemente-Methode (IFEM) eine geeignete Erweiterung des Ansatzes der FEM. Dabei wird um das kreisförmige Gebiet der finiten Elemente in radialer Richtung mit unendlicher Ausdehnung ein Gebiet infiniter Elemente angeschlossen, siehe Abb. 1. Dem gleichen Schema folgend, wird die Helmholtzgleichung in eine schwache Formulierung überführt und ein Gebietsintegral gelöst. Am äußeren Rand des akustischen Außenraums Γ_∞, also im Grenzfall in unendlicher Entfernung zum Mittelpunkt des FE-Gebietes um den Festkörper, gelte die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung

$$\nabla p \cdot \vec{n}_\infty = -jkp \quad \text{auf} \quad \Gamma_\infty, \tag{4}$$

wonach der Schalldruck am Außenrand zu Null abklingt. Eine Koordinatentransformation überführt die *mapped* infiniten Elemente [1] jeweils in ein lokales, kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen t für die transversale Umlaufrichtung und s für die radiale Koordinate in

einem Intervall [-1, 1], auf welchem die Integrale zur Bestimmung der Systemmatrizen aus Gl. (3) elementweise numerisch gelöst werden. Bei der Wahl der Basisfunktionen im Zuge der Diskretisierung wird bei den sogenannten konjugierten Astley-Leis-Elementen [2] ein frequenzabhängiger Phasenterm im Produkt aus Ansatz- und Testfunktion durch komplexe Konjugation eliminiert, sodass die Systemmatrizen frequenzunabhängig bleiben. Darüber hinaus enthalten die Basisfunktionen Interpolationsfunktionen mit Polynomen zur transversalen und radialen Interpolation des kontinuierlichen Schalldruckfeldes. In Umlaufrichtung werden die Interpolationspolynome der finiten Elemente übernommen (häufig lineare oder quadratische Lagrange-Polynome), wohingegen zur radialen Interpolation verschiedene Arten von Polynomen unterschiedlicher polynomialer Ordnung zur Anwendung kommen können. In der Literatur [3, 4] wird gezeigt, dass mit Erhöhung der Ordnung der radialen Interpolationspolynome die Kondition der Systemmatrix abnimmt. Insbesondere bei den Lagrange-Polynomen führt dies bereits etwa ab der achten Ordnung zu einem schlecht konditionierten Problem. Untersuchungen von Shirron und Babuška [3] sowie Dreyer und von Estorff [4] haben gezeigt, dass die Verwendung von Legendre- und Jacobi-Polynomen zu deutlich besser konditionierten Systemmatrizen führt, weshalb wir uns in den folgenden Untersuchungen auf Jacobi-Polynome $P_i^s(s)$ mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ beschränken möchten

$$\int_{-1}^{1} (1-s)^\alpha (1+s)^\beta P_i^s(s) P_j^s(s) \mathrm{d}s = \mu_i \delta_{ij}. \qquad (5)$$

Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen wird die Variation der polynomialen Ordnung dieser radialen Interpolationsfunktionen sein. Dabei wird deren Einfluss auf modale Größen im akustischen Außenraum untersucht, zu denen der nächste Abschnitt eine Übersicht gibt.

Frequenzunabhängige Moden im Außenraum

Zur modalen Zerlegung des akustischen Außenraums werden von Marburg [5, 6] ausführliche Untersuchungen anhand einer einseitig geöffneten Box sowie einer Ellipse in einem luftgefüllten Gebiet finiter und infiniter Elemente vorgestellt. Die sogenannten *normal modes* entsprechen den Eigenwerten und den dazugehörigen Eigenvektoren des folgenden Eigenwertproblems im Zustandsraum

$$(\mathbf{A} + ik\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{r} \qquad (6)$$

mit $\mathbf{r}^T = [\mathbf{0}, -\mathbf{f}] = [\mathbf{0}, -i\omega\rho_f \mathbf{\Theta} \mathbf{v}_s]$. Die Zustandsraummatrizen bestehen aus den frequenzunabhängigen Systemmatrizen für Steifigkeit, Dämpfung und Masse

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -ik\mathbf{p} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}.$$

Es ergeben sich infolge der Asymmetrie der Zustandsraummatrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ linksseitige und rechtsseitige Eigenvektoren $\mathbf{y}_z$ und $\mathbf{x}_z$ [5]

$$(\mathbf{A} - \kappa\mathbf{B})\mathbf{x}_z = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_z^T(\mathbf{A} - \kappa\mathbf{B}) = \mathbf{0}. \qquad (7)$$

Der Index z gibt an, dass die jeweilige Größe der Dimension der Zustandsraummatrizen $2N$ entspricht (auf die mögliche Reduktion dieser Größe um den Rang der Massenmatrix soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Marburg [5] behandelt dieses Problem ausführlich). Die Eigenwerte κ_j sind komplexwertig. Ihr Realteil enthält eine Information über die Dämpfung der zugehörigen Mode und der Imaginärteil gibt an, zu welcher Frequenz die Eigenform in Resonanz tritt. Mittels der modalen Matrizen $\mathbf{Y}_z$ und $\mathbf{X}_z$ lassen sich die Zustandsraummatrizen diagonalisieren

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{A} \mathbf{X}_z = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_{2N}) \qquad (8)$$

$$\mathbf{Y}_z^T \mathbf{B} \mathbf{X}_z = \mathrm{diag}(\beta_1, \ \ldots, \ \beta_{2N}) \qquad (9)$$

und die Werte α_j und β_j ablesen. Der Quotient der jeweiligen Diagonaleneinträge liefert wiederum die komplexen Eigenwerte der *normal modes* $\kappa_j = \alpha_j/\beta_j$. Offenbar ist die Lösung der Eigenwerte dann zuverlässig, wenn die modalen Matrizen bezüglich der Zustandsraummatrizen orthogonal sind und keine oder zumindest nur sehr kleine Nebendiagonaleinträge in den Matrizenprodukten der Glgn. (8) und (9) auftreten. Es wird angenommen, dass jeder numerisch bestimmte Nebendiagonaleintrag zu einem Informationsverlust führt und die nachfolgend bestimmten Eigenwerte ungenau oder gar fehlerhaft sind.

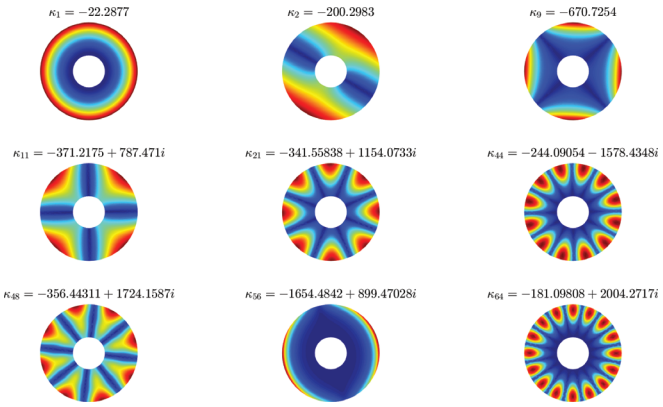


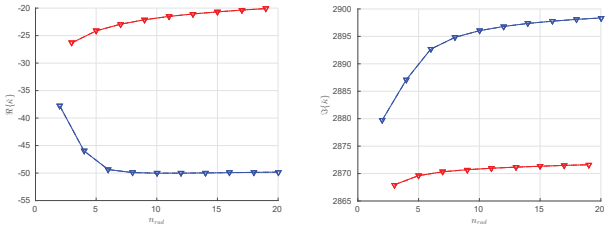
Abbildung 2: Ausgewählte Rechtseigenvektoren als *normal modes* um einen Kreis.

In Abbildung 2 sind ausgewählte Moden als rechte Eigenvektoren dargestellt. Zu erkennen sind neben Monopol-, Dipol- und höheren Multipolmoden auch Eigenformen, die möglicherweise unphysikalisch sind und auf numerische Artefakte zurückzuführen sind. Für offene Strukturen wie der Flöte oder der einseitig geöffneten Box [5, 7] ergeben sich neben den Außenraummoden auch Eigenformen im Innenraum.

Einfluss der radialen Interpolationspolynome auf die Außenraummoden

Mit der Erhöhung der Anzahl der radialen Interpolationspunkte der infiniten Elemente steigt die Anzahl der

Freiheitsgrade im System und somit auch die Anzahl der Eigenwerte. Unter diesen zusätzlich berechneten Eigenformen erwarten wir eine erhebliche Anzahl an unphysikalischen Moden, die identifiziert und vernachlässigt werden sollen. Ein erster Anhaltspunkt für die physikalische Bedeutung einzelner Eigenwerte stellt deren Konvergenzverhalten dar. Für verschiedene Berechnungen unter Variation der Anzahl der radialen Interpolationspunkte lassen sich Eigenwerte beobachten, die mit Erhöhung der polynomialen Ordnung konvergieren, wohingegen einzelne Eigenwerte kein Konvergenzverhalten zeigen und in der komplexen Ebene streuen. Mit Hilfe einer MAC (Modal Assurance Criterion) Analyse lassen sich einzelne Eigenformen und somit die dazugehörigen Eigenwerte verfolgen. In Abbildung 3 ist die Konvergenz eines signifikanten, konvergenten Eigenwertes im Fluid um die Flöte (Realteil und Imaginärteil) über der Polynomordnung n_{rad} dargestellt. Es ist zu beobachten, dass der Eigenwert mit höherer radialer Ordnung konvergiert, wobei es zwei unterschiedliche Konvergenzen für gerade und ungerade Polynomordnungen gibt.



(a) (b)

Abbildung 3: Konvergenz eines Eigenwertes zu einer Mode im Fluid um die Flöte in: (a) Realteil und (b) Imaginärteil (Polynomordnung: ungerade (rot) und gerade (blau)).

Orthogonalität der Außenraummoden

Gemäß der Gleichungen (8) und (9), in denen die modalen Matrizen die Zustandsraummatrizen diagonalisieren, sind die Eigenwerte der *normal modes* $\kappa_j = \alpha_j/\beta_j$ vermutlich fehlerbehaftet, wenn in einer Zeile oder Spalte dieser Matrixprodukte signifikante Nebendiagonaleinträge auftreten. Um solche Zeilen oder Spalten zu identifizieren und um die Nebendiagonaleinträge ins Verhältnis zu α_j oder β_j zu setzen, dient folgende Funktion, die einen Vektor der Länge N liefert für eine Matrix $\mathbf{H} = [h_{ij}]$

$$d = DiagonalQuality(\mathbf{H}) = \frac{\left|\Sigma_i \mathbf{H}^T\right| + \left|\Sigma_j \mathbf{H}\right|}{2\left|diag(\mathbf{H})\right|}. \quad (10)$$

Dieser Vektor d besteht im Falle einer idealen Diagonalmatrix nur aus Einsen, im Falle von signifikanten Nebendiagonaleinträgen ist $d \gg 1$ und somit ein mögliches Indiz für einen fehlerbehafteten Eigenwert. Für den Kreis in Abbildung 2 stellt Abbildung 4 die Vektoren d für die α- und β-Matrix in rot und blau dar. Ausreißer vom Median werden identifiziert und die von den Ausreißern bereinigten Kurven in magenta bzw. cyan gezeigt. Es wird vermutet, dass diese Ausreißer zu mathematischen Artefakten beziehungsweise spurious modes gehören und folglich unphysikalisch sind oder bei modaler Superposition gar zu einem fehlerhaften Gesamtergebnis führen.

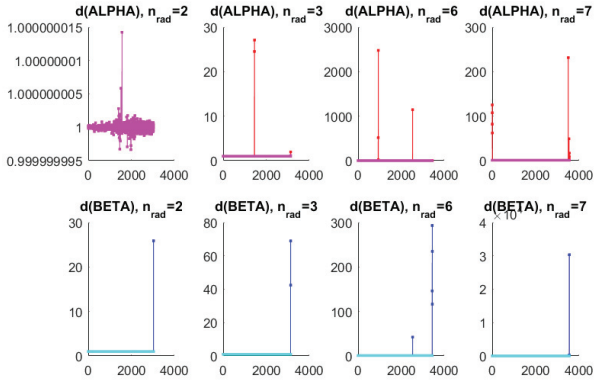


Abbildung 4: Vektor zur Bestimmung der Diagonalität der α-Matrix (oben) und der β-Matrix (unten) in rot und blau mit Erhöhung der polynomialen Ordnung n_{rad} von links nach rechts. Von Ausreißern bereinigte Kurven in magenta und cyan.

In Tabelle 1 sind die Ausreißer in der α- und der β-Matrix für die jeweiligen Berechnungen mit variierenden Polynomgraden zusammengefasst.

Tabelle 1: Anzahl der Ausreißer in α- und β-Matrix für unterschiedliche Ordnungen der Polynome n_{rad}

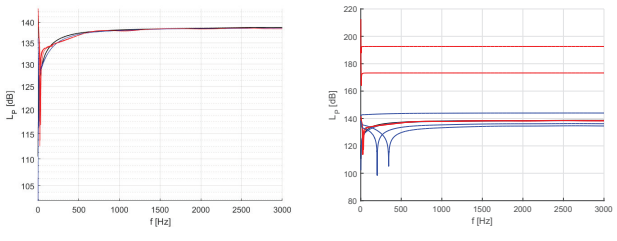
n_{rad}	2	3	6	7	10	11	14	15
Anzahl Ausreißer	1	4	9	12	17	20	25	30

Schallleistung

Die abgestrahlte Schallleistung in diskreter Form kann wie folgt berechnet werden [6]

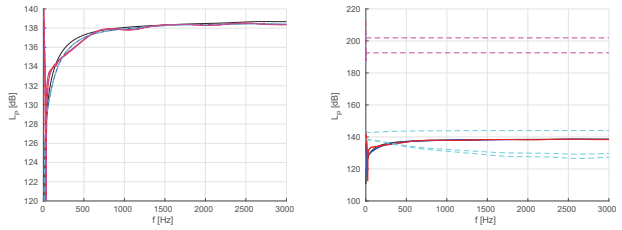
$$P = \frac{1}{2}\Re\left\{\mathbf{p}_\Gamma^T \Theta_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma^*\right\}. \quad (11)$$

Auf den Kreis wird eine willkürliche Oberflächenschnelle aufgeprägt, um ein Ergebnis für die vom Kreis abgestrahlte Schallleistung zu erhalten. Nach Vollinversion des linearen Gleichungssystems in Gleichung (3) erhält man den diskreten Druckknotenvektor $\mathbf{p}$ zum Einsetzen in die Gleichung der Schallleistung. Diese liefert ungefähr das gleiche Ergebnis wie eine Vergleichsrechnung mit COMSOL Multiphysics unter Verwendung von Perfectly Matched Layers (PML), wie in Abbildung 5(a) dargestellt. Auch hier sind zwei Konvergenzen mit steigender ungerader (rot) und gerader (blau) radialer Interpolationsordnung der infiniten Elemente zu beobachten. Die Schallleistung lässt sich ebenso aus den modalen Matrizen der *normal modes* berechnen, wie von Marburg [5] beschrieben. In Abbildung 5(b) sind die Schallleistungen für verschiedene Grade der Interpolationspolynome dargestellt. Offenbar liefern einige Berechnungen Ergebnisse, die sehr nah an die Ergebnisse der Vergleichsrechnung in



(a) (b)

Abbildung 5: Abgestrahlte Schallleistung für willkürliche Oberflächenschnelle auf dem Kreis: (a) Ergebnis nach Vollinversion mit ungeraden (rot) und geraden (blau) polynomialen Ordnungen und Vergleichsrechnung mit COMSOL (schwarz); (b) Komplette modale Superposition der NM.



(a) (b)

Abbildung 6: Abgestrahlte Schallleistung mittles: (a) Vollinversion (rot, blau); (b) durch modale Superposition der NM mit guten Diagonaleigenschaften (magenta, cyan).

COMSOL beziehungsweise an die Ergebnisse nach Vollinversion heranreichen. Viele andere Berechnungen liefern jedoch gänzlich falsche Schallleistungskurven.

Im nächsten Schritt werden nun die in Abbildung 4 und in Tabelle 1 dargestellten Ausreißer in der Diagonalmatrix bei der Berechnung der Schallleistung mittels modaler Superposition ausgelassen, um zu überprüfen, ob dies zu einer Verbesserung des Ergebnisses führt. In Abbildung 6 werden die modal superponierten Schallleistungen mit denen mittels Vollinversion berechneten verglichen. Für die radialen Ordnungen 2, 3 und 7 (Abb. links) liefert die Vernachlässigung dieser nicht-diagonalen Moden das gleiche Ergebnis für die abgestrahlte Schallleistung wie die Vergleichsrechnung. Für die übrigen radialen Ordnungen 6, 10, 11, 14 und 15 liefert die modale Superposition der verbleibenden, orthogonalen Moden nach wie vor ein falsches Ergebnis für die Schallleistung. Dieses liefert zum Teil Ergebnisse, die dem Resultat der kompletten modalen Superpositon entsprechen, teilweise jedoch auch gänzlich andere Kurven, die deutlich von den Referenzkurven abweichen.

Zusammenfassung

Die modale Zerlegung des akustischen Außenraums mit *normal modes* liefert Innenraum- wie Außenraummoden im Fluid um eine Struktur, die bei modaler Superposition die abgestrahlte Schallleistung teilweise hinreichend genau berechnen können. Einige Moden sind jedoch offensichtlich unphysikalisch und auf mathematische Artefakte zurückzuführen. Dies kann mit Einschränkungen an den Orthogonalitätseigenschaften der Moden erkannt werden. Hierbei führt die Vernachlässigung einzelner Moden, die diese gewünschte Orthogonalität nicht aufweisen, bei einigen Berechnungen zu besseren Ergebnissen. Dieses Kriterium bedarf weiterer Untersuchungen, da es in einigen Fällen keinerlei Besserung der Kurven der Schallleistung liefert, demnach also noch weitere Moden unphysikalisch sind.

Die Konvergenzstudie der *normal modes* mit Erhöhung der polynomialen Ordnung der radialen Interpolation der infiniten Elemente offenbart Unterschiede zwischen geraden und ungeraden Polynomen. Mittels MAC Analyse lassen sich die Eigenwerte nachverfolgen und deren Konvergenzverhalten untersuchen. Die unterschiedlichen Konvergenzen sind möglicherweise auf den verwendeten Eigenwertlöser in Matlab zurückzuführen und sollen Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

Literatur

[1] Astley, R. J. u. a. (1998): “Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain”. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 103(1):49–63.

[2] Astley, R. J. (2008): “Infinite Elements”. In: *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. S. Marburg und B. Nolte, Hrsg. Springer Berlin Heidelberg, S. 197–230.

[3] Shirron, J. J. und I. Babuška (1998): “A comparison of approximate boundary conditions and infinite element methods for exterior Helmholtz problems”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164(1):121–139.

[4] Dreyer, D. und O. Von Estorff (2003): “Improved conditioning of infinite elements for exterior acoustics”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58(6):933–953.

[5] Marburg, S. u. a. (2006): “Normal modes in external acoustics. Part II: Eigenvalues and eigenvectors in 2D”. In: *Acta Acustica united with Acustica* 92(1):97–111.

[6] Marburg, S. (2006): “Normal modes in external acoustics. Part III: Sound power evaluation based on superposition of frequency-independent modes”. In: *Acta Acustica united with Acustica* 92(2):296–311.

[7] Moheit, L. und S. Marburg (2015): “Vergleich frequenzabhängiger und - unabhägiger Moden der Schallabstrahlung akustischer Aussenraumprobleme”. In: *Fortschritte der Akustik*. S. Becker, Hrsg. DAGA 2015, 41. Jahrestagung für Akustik. DEGA e.V.