Hornleiter nach dem Impulskonzept.

O. Bschorr,

Aeroakustik Stuttgart

Zusammenfassung.

Die Schallausbreitung in einem 1D-Kanal mit variablem Querschnitt ist durch die Webster-Gleichung festgelegt. Bei einem exponentiellen Querschnittsverlauf liefert diese eine Cut-off-Frequenz unterhalb der keine Wellenleitung möglich ist. Während die Webster Gleichung auf einer Kräftebilanz beruht und eine Differential-Gleichung 2. Ordnung darstellt, reduziert eine Impulsbilanz diese um eine Ordnung und hat keine Cut-Off-Beschränkung.

Einleitung.

Die konventionelle, auf einem Kräftegleichgewicht basierende 1. Cauchy-Bewegungsgleichung lieferte bei deviatorischen Festkörperwellen nur triviale Null-Lösungen. Deswegen wurde in [3, 4] hypothetisch die Kraftbilanz durch eine Impulsbilanz ersetzt. Aufgabe ist, das hypothetische Impulskonzept auf Schall- und auf Strömungsvorgänge in flüssigen und gasförmigen Medien zu übertragen, um im Sinne von Popper nachprüfbare Vorhersagen anzubieten. Im Weiteren soll die Wellenkrümmung als Feldvariable durch die direkt zugängliche Horngeometrie ersetzt und eine Fehlerkorrektur gegenüber [4] vorgenommen werden.

Horn-Modell.

Zugrunde liegt ein halbunendlicher 1D-Wellenleiter mit der Koordinate $x \geq 0$ [m]. Der aus Gas, bzw. Fluid bestehende Leiter ist homogen und hat die longitudinale Wellengeschwindigkeit c [m/s], die Dichte ρ [kg/m^3] und den Elastizitätsmodul $E = \rho c^2$ [Pa]. Der Querschnitt $A = A(x)$ [m^2] bzw. der charakteristische Horndurchmesser $D = \sqrt{A}$ [m] ist ortsabhängig. Die in x-Richtung laufende Longitudinalwelle habe die Kreisfrequenz ω [rad/s], die Wellenlänge λ [m] und die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ [rad/m] und sei durch die longitudinale Auslenkung $s = s(x,t)$ [m] bzw. durch die abhängigen, aber besser erfassbaren Messgrößen, die Schnelle $s°$ [m/s] und den Schalldruck $p = E\partial s/\partial x := Es'$ [Pa] beschrieben. Die Größen $\# = \{A,D,s,p\}$ haben die Ableitungen $\#' = \partial\#/\partial x$ und z.T. $\#° = \partial\#/\partial t$. (t [s] = Zeit). Realisierbar durch eine „schlanke“ und „glatte“ Hornkontur mit $\lambda >> D$ und $D'/D << k$ wird auf verlustlose Hornleiter (bzw. auf Stromfäden mit $A \rightarrow 0$) mit über der gesamten Hornlänge konstanter Schall-Leistung J [W] eingeschränkt. - Über eine komplexe Wellengeschwindigkeit $c \rightarrow c(1 + i\eta/2)$ kann auf Wellen mit dem Verlustfaktor η [-] erweitert werden.

Webster-Horngleichung.

In dem oben spezifizierten Leiter wird der Schalldruck $p = p(x,t)$ durch die nach Webster benannte Gleichung

$$p^{°°} - c^2(Ap')'/A = 0 \qquad (1)$$

bestimmt. Als Lehrbuch-Beispiel [1] dient der Leiter mit dem exponentiellen Hornquerschnitt $A_0 \exp \alpha x$. (2). Bei diesem besteht die Druckwelle (3) und die am Eingang bei $x = 0$ anliegende Impedanz $Z_0 = (pA/s°)_0$ [kg/s].

$$A = A_0 \exp \alpha x \qquad (2)$$

$$p = p_0 \exp [i(\omega t - kx\sqrt{(1 - \alpha^2/4k^2)} - \alpha x/2] \qquad (3)$$

$$Z_0 = \rho c A_0[\sqrt{(1 - (f_G/f)^2)} + if_G/f] \qquad f_G = \alpha c/4\pi \qquad (4)$$

Bemerkenswert ist das Auftreten einer Grenzfrequenz $f_G = \alpha c/4\pi$ [Hz]. Für Frequenzen $f < f_G$ ist die Impedanz Z_0 rein imaginär, so dass in diesem Bereich nur Blind- aber keine Wirkleistung übertragen wird. [1].

Alternative Horn-Gleichung. Von Pierce [2, S. 360] wurde die Webster-Gleichung (1) vom Druck p auf die kombinierte Feldvariable $(p\sqrt{A})$ umgeformt.

$$(p\sqrt{A})^{°°}/c^2 - (p\sqrt{A})'' = (p\sqrt{A})[(A')^2 - 2AA'']/4A^2 \qquad (5)$$

Man erkennt auf der linken Seite die Wellengleichung für $(p\sqrt{A})$. Das Quadrat $(p\sqrt{A})^2 = p^2A$ ist mit der Schallintensität $j = p^2/\rho c$ [W/m^2] ein Maß für die über den Kanalquerschnitt A transportierte Schall-Leistung $J = jA$ [W]. Speziell bei dem konischen Horn mit dem Flächenverlauf

$$A = \Omega x^2 \qquad \rightarrow \quad [(A')^2 - 2AA'']/4A^2 = 0 \qquad (6)(7)$$

entfällt das Störglied auf der rechten Gleichungsseite und die Pierce-Gleichung (5) erfüllt die $p\sqrt{A}$-Invarianz, nicht aber bei den anderen Hornprofilen. (Ω [sterad] = Öffnungswinkel des konischen Horns; $\Omega = 4\pi$ entspricht einer Kugelwelle).

Impulsbezogene Horngleichung.

Vorarbeit. Halbunendlicher Leiter: Ausgegangen wird von [4] mit Gleichung *(5)*

$$\textit{(5)} \qquad \rho c s° \mp (ERs)'/R = 0 \qquad (8)$$

Diese für den inhomogenen 1D-Wellenleiter gültige Schwingungsgleichung wird auf den homogenen Leiter mit $E = \rho c^2 =$ const vereinfacht und man erhält:

$$s° \mp c\,(Rs)'/R = 0 \qquad (9)$$

Der Krümmungsradius R [m] der Wellenfront kann auf die Hornkontur zurückgeführt werden. Über die eingangs beanspruchten Eigenschaften $\lambda >> D$ und $D'/D << k$ hinaus wird verlangt, dass die Phasenfläche der Welle senkrecht zur Kanalkontur steht, analog einer Kugelwelle mit dem Quellabstand R in einem Kegelstumpf mit dem Durchmesser $D = \sqrt{A}$. Für diese Situation gelten die Invarianten

$$sR = s_0R_0 = \text{const} \qquad \rightarrow s\sqrt{A} = s_0\sqrt{A_0} = \text{const}\,. \qquad (10)$$

Damit lautet die auf dem hypothetischen Impulskonzept beruhende Wellengleichung für den halbunendlichen 1D-Hornleiter mit dem Querschnittsverlauf $A = A(x)$:

$$s° \mp c(s\sqrt{A})'/\sqrt{A} = 0 \qquad (11)$$

Während es sich bei der Webster-Gleichung (1) um eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, treten in (11) nur die Ableitungen 1. Ordnung der Auslenkung $s = s(x,t)$ [m] auf. Die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung ist sehr viel einfacher und direkt integrierbar. Mit den Anfangswerten s_0 und A_0 am Eingang bei $x = 0$ lautet die Lösungsgleichung der in +x-Richtung laufenden Welle

$$s = s_0\sqrt{(A_0/A)} \exp i(\omega t - kx) \qquad (12)$$

Für ein Horn mit dem exponentiellen Flächenverlauf (2) liefert die impulsbezogene Wellengleichung (11) die Auslenkung s, Schnelle s°, Druck p und die Impedanz Z_0, (16). Im Gegensatz zu (4) besteht hier bei $f < f_G$ eine Wellenleitung.

$$s = s_0 \exp [i(\omega t - kx) - \alpha x/2] \qquad s° = v = i\omega s \qquad (13)(14)$$

$$p = Es' = s_0\, \rho c^2(\alpha/2 - ik) \exp [i(\omega t - kx) - \alpha x/2] \qquad (15)$$

$$Z_0 = (pA/s°)_0 = \rho c A_0[1 - if_G/f] \qquad f_G = \alpha c/4\pi \qquad (16)$$

Endliche Hornleiter. Beim mit Gas gefüllten Hornleiter der Länge L ist der sog. schallharte Abschluss am einfachsten zu realisieren und hat nach [3] die Auslenkung s und mit $s° = i\omega s$ und $F = pA = Es'A$ die Eingangsimpedanz Z_0.

$$s = 2s_0 \sqrt{(A_0/A)} \sin k(L - x) \exp i\omega t \qquad (17)$$

$$Z_0 = (F/s°)_0 = i\, \rho c A_0[\mathrm{cotg}\, kL - (A'/2kA)_0] \qquad (18)$$

Bei Verlustlosigkeit – bei rein reeller Geschwindigkeit c - besteht erwartungsgemäß eine rein imaginäre Impedanz mit den Wellenzahlen k_n für Resonanz und k_m für Antiresonanz.

$$k_nL = n\pi \qquad n, m = 1, 2, 3\ldots \qquad (19)$$

$$k_mL = (m - ½)\pi - \mathrm{arc\,tg}\, (A'/2k_mA)_0 \qquad (20)$$

Die Resonanz $k_nL = n\pi$ ist nur von der Länge L, nicht aber von der Kontur A des Wellenleiters abhängig. Bei Antiresonanz geht der Gradient $(A'/A)_0$ bei $x = 0$ mit ein.

Der dazu analoge Hornleiter mit einem schallweichen Abschluss bei $x = L$ wurde bereits in [4] behandelt und wird zur Fehlerkorrektur hier wiederholt.

$$s = 2s_0 \sqrt{(A_0/A)} \cos k(L - x) \exp i\omega t \qquad (21)$$

$$Z_0 = i\, \rho c A_0 [\mathrm{tg}\, kL - (A'/2kA)_0] \qquad (22)$$

Der 2. Term der Impedanz Z_0 entspricht einer Feder mit der Konstanten $K= F/s = \rho c^2A'$. [N/m].

Strömung.

Schallausbreitung und Strömung sind verwandte Phänomene: So kann die Strömung als eine Welle mit der Frequenz Null aufgefasst werden, und umgekehrt lässt sich die Schallwelle als eine alternierende Strömung beschreiben. Im Folgenden soll das bei der Schallwelle exemplifizierte Impulskonzept auf eine Strömung übertragen werden.

1D-Strömung. Bei einer stationären 1D-Strömung mit dem Querschnitt $A=A(x)$, der Geschwindigkeit $v = v(x)$ [m/s] und der Dichte $\rho = \rho(x)$ gilt die Kontinuität $Q = \rho vA = \mathrm{const}$ [kg/s]. Für ein Gas mit dem Adiabatenkoeffizienten γ [-] und der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{(\gamma p/\rho)}$ folgt die zur Auslegung von Düsen maßgebende Hugoniot-Formel:

$$A'/A = (v^2/c^2 - 1)v'/v \qquad (23)$$

Wie in der Laval-Düse realisiert, verlangt eine Expansionsströmung ($v'/v > 0$) bei Unterschall ($v/c < 1$) einen konvergenten ($A'/A < 0$) und bei Überschall einen divergenten Düsen-Querschnitt.

3D-Strömung. Eine Gasströmung mit den kartesischen Koordinaten $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ ist durch die Feldgrößen & ={ρ, p, **v**} bestimmt: Die Dichte ρ, die vektorielle Strömungsgeschwindigkeit **v**, und der tensorielle Druck $\mathbf{p} = p\mathbf{U}$ [Pa]. ($\mathbf{U} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$). Die numerische Lösung der 3 unbekannten Feldvariablen & verlangt 3 Bestimmungsgleichungen: (i) So folgt aus der elementaren, lokalen Massenerhaltung die Dichteänderung ρ°

$$\rho° = - \mathrm{div}\, \rho\mathbf{v} \qquad (24)$$

und ergibt (ii) für ein Gas mit der Adiabaten $p\rho^{-\gamma} = \mathrm{const}$ die Druckänderung p°

$$p° = \gamma\, p(\rho°/\rho) \qquad (25)$$

(iii) Die Geschwindigkeitsänderung **v°** errechnet sich aus der klassischen Navier/Stokes Gleichung

$$\rho\mathbf{v}° + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \nabla p + \mu\, \Delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (26)$$

Zur dynamischen Viskosität μ kommt bei zwei- und mehratomigen Gasen noch eine Relaxationsdämpfung. [5].

Für eine numerische Berechnung werden Feldpunkte **P**(x,y,z) z.B. gitterförmig über das Strömungsfeld verteilt, so dass mit ausreichender Auflösung die Gradienten ∇& und auch der Laplace-Operator Δ**v** ermittelt werden kann. Zum Zeitpunkt t bestehe in **P** der Zustand &(t). Mit den Änderungsgeschwindigkeiten &° (24) – (26) liefert eine lineare Extrapolation den Zustand &(t + dt) nach einem finiten Zeitschritt dt.

$$\&(t + dt) \approx \&(t) + \&° dt \qquad (27)$$

Kräfte- oder Impulskonzept? Es liegt nahe, in (26) den Term ρ**v°** [N/m³] als d´Alembert-sche Trägheitskraft zu deuten und die Navier-Stokes-Gleichung als Kräftegleichgewicht zu sehen. Tatsächlich folgt (26) aus der Zusammenfassung der bereits benützten Massenerhaltung (24) und der Erhaltung des durch **P** gehenden Impulsflusses **T** [Hy/sm²]

$$\mathbf{T} = \rho\mathbf{vv} + p\mathbf{U} + \mu\, \nabla\mathbf{v} \qquad (28)$$

Dieses Ergebnis wurde in [6] ohne Benützung des Kräftekonzepts elementar aus der Moleküldynamik abgeleitet.

Korrektur.

In [4] sind die Formeln (12) und (13) fehlerhaft; und sind zu ersetzen durch (12´) und (13´): (12´)

$$s(x,t) = 2(C_+D_0/D) \cos (kL - kx + \Theta/2) \exp i(\omega t - kL - \Theta/2)$$

$$Z_0 = i\, \rho c A_0[\mathrm{tg}\, kL - i(D'/kD)_0] \qquad (13')$$

Quellen.

[1] R. Lerch, G. Sessler, D. Wolf: Technische Akustik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.
[2] A, Pierce: Acoustics. ASA. Acoust. Soc. America. 1994.
[3,4] O. Bschorr. (=O. B.) DAGA-Fortschritte der Akustik. [3] 2014, Seite 80/81. [4] 2015. Seite 828/829.
[5] O. B: Implementing the Relaxation Damping of Air into the Navier-Stokes-Equation. AIAA-Journ. Vol. 32 (1994).
[6] O. B: Deduktion der Transportgleichungen für ein Modellgas aus der Molekülstatistik. ZFW 16 (1992) S.396.